波動方程式の導出

大淵　武史

2008.05.22

目 次

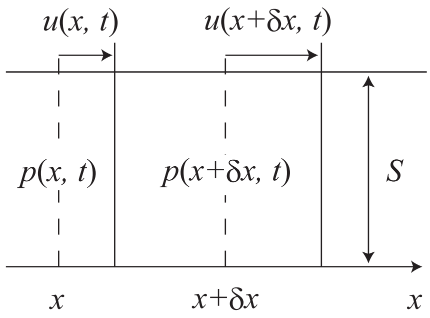

図 1: x の正の方向に伝搬する平面波

1 波動方程式

波動方程式は光学や電磁気学など様々な分野で基本式として用いられる。当然音響学においても波動方程式は基本式である。波動方程式は、音波など波のふるまいを与える微分方程式である。以降で波動方程式の導出をする。

1.1 波動方程式の導出

簡単のため一次元の波動方程式を考える。音波を伝える媒質の粒子は音波によって x 方向にしか動かないものとする。いま、Fig. 1 のように音波によって $x = x$ の位置にある面積 S の面と $x = x + \delta x$ の位置にある面積 S の面に囲まれる微小立方体が、音波によって変形したとする。$x = x$ の面上にある粒子が音波のために $u(x, t)$ だけ変位したとする。すなわち、粒子の位置が $x = x$ から $x = x + u(x, t)$ へと動いたとする。すると、$x = x + \delta x$ 面上の粒子は $u(x+\delta x, t)$ だけ変位することになる。したがって、媒質は音波によって $S\delta x$ から $S\{u(x+\delta x, t) - u(x, t)\}$ だけ膨張したことになる。この膨張は音圧によっておこるものであるから、音圧 p と媒質の膨張率の関係は体積弾性率 K を用いて以下の式で表わされる。

$$\begin{aligned} \frac{p}{K} &= -\frac{S\{u(x+\delta x, t) - u(x, t)\}}{S\delta x} \\ &= -\frac{\partial u}{\partial x}. \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

さらに、両辺を時間で微分して

$$\frac{1}{K}\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1.1.2}$$

が得られる。

次に媒質の運動を考える。媒質が $u(x,t)$ という変位をするのは、$x = x$ における面と $x = x + \delta x$ における面それぞれにかかる圧力が異なるからである。$x = x$ 面には $p(x,t)$ という圧力がかかり、$x = x + \delta x$ 面には $p(x+\delta x, t)$ という圧力がかかるとすると媒質には以下に示す力 F がかかる。

$$F = S\{p(x,t) - p(x+\delta x, t)\}. \tag{1.1.3}$$

この力によって、媒質は運動する。媒質の密度を ρ とすると、質量は $\rho S \delta x$ となり、加速度は $\partial v/\partial t$ であるとすると

$$\begin{aligned} \rho S \delta x \frac{\partial v}{\partial t} &= S\{p(x,t) - p(x+\delta x, t)\} \\ \rho \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{p(x,t) - p(x+\delta x, t)}{\delta x} \\ \rho \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial x}, \end{aligned} \tag{1.1.4}$$

という運動方程式が得られる。

eqs. (1.1.2), (1.1.4) より以下の連立方程式が得られた。

$$\begin{aligned} -\frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{1}{K}\frac{\partial p}{\partial t} \\ -\frac{\partial p}{\partial x} &= \rho \frac{\partial v}{\partial t}. \end{aligned} \tag{1.1.5}$$

この連立方程式で上式を t で微分し、下式を x で微分し整理すると以下の微分方程式が得られる。

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}. \tag{1.1.6}$$

ここで、c は音速であり、K 及び ρ とは以下の関係がある。

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}}. \tag{1.1.7}$$