

# 音響システム研究室 新入生ゼミ講義テキスト

2009 年度版



新入生ゼミ実行委員会



# はじめに

筑波大学にて長い歴史のある音響システム研究室は、40人弱の学生を抱え、かつて無いほどの大所帯となっている。そのような中、自分が今まで学んできたものを効率よく後輩に伝えたいと3年前に始めたのが新入生ゼミである。今まで一人でやってきた新入生ゼミを一新し、4回目の今回は、4人の博士後期課程在籍者により分担をして講義をする。そして、理論・シミュレーションのみであった内容も実験と理論の両方に関する講義により、より実際的な内容となっている。講義内容及び担当者は以下の通りである。

1. アナログ実験 (pp. 1-6, 担当; 西 宮)
2. デジタル実験 (pp. 7-14, 担当; 佐 藤)
3. 信号処理入門 (pp. 15-40, 担当; 海老原)
4. 音響特性入門 (pp. 41-60, 担当; 大 淵)

音響システム研究室において研究する上で、ほとんどの人が必要となる基礎的な内容を選んだ。そして、それぞれの講義担当者が作成した講義資料を編集したものがこのテキストである。上の順番でこのテキストはまとめられているが、実際の講義順番は

1. 信号処理入門
2. アナログ実験
3. デジタル実験
4. 音響特性入門

となっており、それぞれ2限分、計8限分の講義をする。

ここでいくつかの注意点を述べる。

まず、内容を全面的に信じていることがないように。このテキストは、それぞれ担当者が執筆した後、内容の確認を複数人で行なっているが、必ずしも正しいとは限らない。

論文>専門書>>博士論文>>本テキスト>修士論文

実感としては上のような信頼度である。研究をする上で必要になった場合は複数の文献に当たり、かつ自分の手と頭を使って内容の検証をすること。

次に、特に理論においては、簡単のため近似を用いている。どのような場合に適用することができるのか各自しっかり押さえておくように。

以上の点に注意を払い、新入生ゼミが研究を始める取っ掛かりとなり、効率的に研究を進めることができれば幸いである。

2009年4月1日

大淵 武史

# 目次

<b>第 I 部 アナログ実験</b>	<b>1</b>
<b>1 回路作成</b>	<b>1</b>
1.1 コンデンサマイクロフォン	1
1.2 OP アンプ	1
1.3 理想的な OP アンプ	2
1.4 回路図	5
<b>2 測定</b>	<b>6</b>
2.1 指向特性および周波数特性	6
2.2 距離測定	6
<b>第 II 部 デジタル実験</b>	<b>7</b>
<b>3 実験機材と使用方法</b>	<b>7</b>
<b>4 LabVIEW とは</b>	<b>7</b>
<b>5 実験の手引き</b>	<b>8</b>
5.1 使用機材	8
5.2 機材の接続	8
5.3 プログラムの作成	8
5.3.1 DAQ カード制御 VI “DAQ アシスタント”	8
5.3.2 計測電圧表示 VI “波形グラフ”	8
5.4 データ計測	8
<b>6 サンプルレートとサンプル数</b>	<b>9</b>
6.1 スペクトル計測	9
<b>7 応用：伝搬時間計測実験</b>	<b>11</b>
7.1 プログラムの作成	11
7.2 トリガの設定	13
7.3 データの記録 “計測ファイルへ書き込み”	13
<b>第 III 部 信号処理入門</b>	<b>15</b>
<b>8 信号の表現</b>	<b>15</b>
8.1 信号の定義	15
8.2 信号の領域	15

8.2.1	信号の時間領域における表現	16
8.2.2	信号の時間-周波数領域における表現	16
8.2.3	信号の空間領域における表現	17
8.3	連続時間信号と離散時間信号	17
8.3.1	連続時間信号	17
8.3.2	離散時間信号	17
8.4	A/D, D/A 変換とサンプリング定理	18
8.4.1	A/D, D/A 変換	18
8.4.2	サンプリング定理	18
<b>9</b>	<b>信号処理</b>	<b>20</b>
9.1	相関関数	20
9.1.1	積	20
9.1.2	内積	20
9.1.3	相関関数	22
9.2	フーリエ変換	24
9.2.1	フーリエ変換の概要	24
9.2.2	級数展開によるフーリエ変換 (その1): フーリエ級数展開 I	26
9.2.3	級数展開によるフーリエ変換 (その2): フーリエ級数展開 II	28
9.2.4	級数展開によるフーリエ変換 (その3): フーリエ変換への拡張	29
9.3	離散フーリエ変換	30
9.4	畳み込み	34
9.4.1	畳み込みの概要	34
9.4.2	畳み込みの数学的な導出	35
<b>10</b>	<b>研究への展開</b>	<b>37</b>
10.1	信号処理の例	37
10.1.1	相関関数	37
10.1.2	フーリエ変換	38
10.2	雑音	39
<b>11</b>	<b>課題</b>	<b>40</b>
11.1	課題 1	40
11.2	課題 2	40
<b>第 IV 部 音響特性入門</b>		<b>41</b>
<b>12</b>	<b>波動方程式</b>	<b>41</b>
12.1	波動方程式の導出	41
12.2	波動方程式の解	43

<b>13 音響インピーダンス</b>	<b>45</b>
<b>14 音波伝搬</b>	<b>47</b>
14.1 遠距離場・近距離場 . . . . .	49
14.2 指向性 . . . . .	49
14.3 音波の減衰 . . . . .	50
<b>15 周波数特性</b>	<b>51</b>

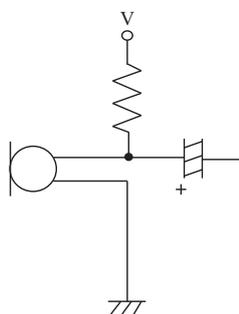


Fig. 1.1: コンデンサマイクロフォンへの電源供給

## 第I部

# アナログ実験

この実験では、我々が音響研の一員としてこれからやっていく皆さんの研究基盤を作るために、マイクを自作し、そのマイクを駆使して音を測定します。最も基礎的なことを行うので、すでに知っている人や回路の得意な人はつまらないかもしれませんが、音を扱った研究をするための最初の実験としてはとても重要なことをしますので、しっかり頑張ってください！

## 1 回路作成

### 1.1 コンデンサマイクロフォン

音の振動を電圧の振動に変えるための素子であるマイクロフォンの説明をしたいと思います。今回使用するのはコンデンサマイクロフォンです。コンデンサマイクロフォンを使用するために絶対に忘れてはいけないことが一つあります。それはダイナミック型のマイクロフォンと違って、電源を供給してあげなければならないということです。コンデンサの静電容量の変化を電気信号に変換するために、マイクロフォン内部にあるコンデンサの電極に電圧を掛ける必要があるからです。そこで、一般的にコンデンサマイクロフォンを使う時に使われる回路図を Fig. 1.1 に載せておきます。しかしこれだけだと、音波による振動から得られる電圧はごく微小なものになってしまいます。そこで次節で挙げるような増幅器が必要になってくるわけです。

### 1.2 OP アンプ

オペアンプは演算増幅器 (Operational Amplifier) のことであり、OP アンプなどと呼ばれていて、最も汎用性のあるアナログ IC の一つです。その用途も様々で、名称の通り演算器として加算、減算、積分などの演算を行ったり、増幅器として作動させることが出来ます。簡単に OP アンプの構造を理解するため、図記号を Fig. 1.2(a) に載せてあります。基本的な端子は 2

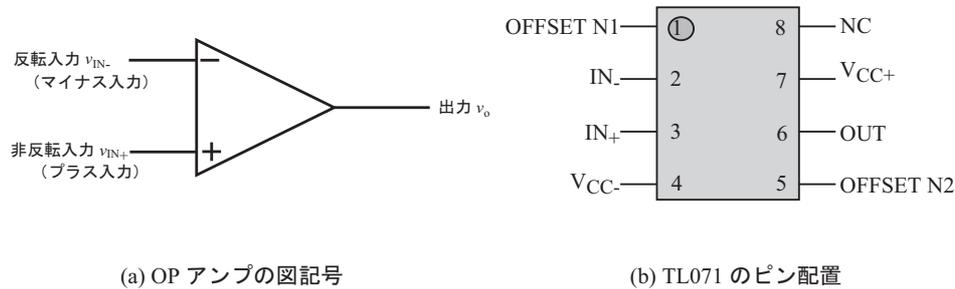


Fig. 1.2: OP アンプ

入力 1 出力で、それとは別に電源端子とアース端子や調整用端子などが存在し、8 本ピンが一般的です。ですが本質的に重要なのは入力と出力の 3 本ですので、図記号ではこのような形をしています。本実験で用いる OP アンプの型番は TL071 で、入力 2 本と出力 1 本、および電源端子 2 本を用いて実験を行います。TL071 のピン配置を Fig. 1.2(b) に載せておきます。

本実験の趣旨はマイクロフォンを作ることですが、音波をマイクロフォンで拾って得られる電圧はごく微小なものです。そこで OP アンプを増幅器として使用することで適切な電圧を得ようというわけです。今回は反転増幅を行います。まずは基本的なことから見いきましょう。

### 1.3 理想的な OP アンプ

OP アンプを使って何らかの回路を作る際、OP アンプは理想的な OP アンプとして使われることがほとんどです。では何が理想的か？ということを示します。これらの条件を用いると、計算が非常に楽になります。

- 1 開ループ利得  $A_0$  が無限大である。
- 2 同相利得  $A_{CM}$  が零である。
- 3 入力インピーダンスが無限大である。
- 4 出力インピーダンスが零である。

ここで、Fig. 1.2(a) を用いて OP アンプの二つの入力端子に  $v_{IN+}, v_{IN-}$  という電圧を加えたとすると、出力電圧  $v_o$  は以下のように表せます。

$$v_o = A_{CM}(v_{IN+} + v_{IN-})/2 + A_o(v_{IN+} - v_{IN-}). \quad (1.1)$$

$A_{CM}$  が同相利得で、 $A_o$  が開ループ利得になります。すなわち、理想的な OP アンプを考えたとき、 $v_{IN+} = v_{IN-} = v_c$  で入力電圧が等しいときは、同相利得  $A_{CM}$  が零ですので出力電圧  $v_o$  は零になります。しかしながら、実際には僅かな出力電圧が生じるので、同相入力成分を完全に除去することは出来ません。Eq. (1.1) から、

$$A_{CM} = v_o/v_c, \quad (1.2)$$

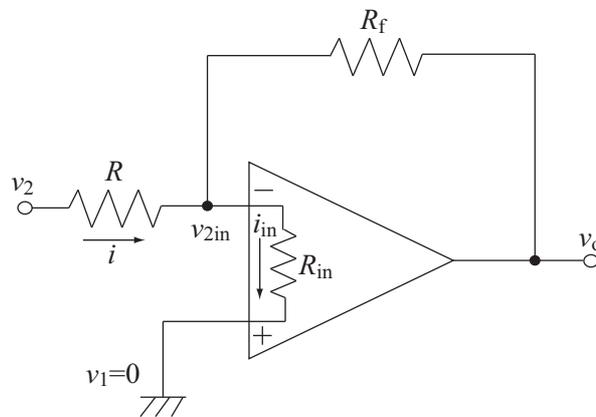


Fig. 1.3: 負帰還の掛かった反転増幅回路

となります。また、同相利得  $A_{CM}$  と開ループ利得  $A_o$  の比を同相信号除去比 (CMRR) といい、

$$CMRR = 20 \log(A_o/A_{CM}), \quad (1.3)$$

で表せます。ちなみに今回の実験で用いる TL071 の CMRR は 70 dB もあります。大体 OP ではこれ以上の大きさの CMRR であるため、理想的な条件として 1, 2 を考えられるというわけです。

また、OP アンプの使用法を大まかに分けると以下のようになります。

**使用法 1** 負帰還を用いる

**使用法 2** 正帰還を用いる

**使用法 3** 帰還を用いない

OP アンプを利用した回路ではその多くが使用法 1 を用いており、反転増幅や加算、減算、積分などを行う際にはこの負帰還を用います。使用法 2 は発振回路などを作る際に利用されます。使用法 3 は、OP アンプの動作原理そのものを利用した比較器 (コンパレータ) などの用途として用いられます。本実験では反転増幅を用いるので、使用法 1 の負帰還を用いるわけですが、この負帰還を用いる増幅の際に最も重要な考えとして、イマジナリーショート (仮想短絡) という概念があります。これは、反転入力と非反転入力が仮想的に短絡して電位差が 0 になるというものです。入力インピーダンスが  $\infty$  なので、実際に電圧は生じてても電流は流れないために、仮想短絡と呼ばれています。通常は、理想的な OP アンプであることを仮定してイマジナリーショートを用いますが、実際には完全に理想的な OP アンプなどというものはありませんよね？と、いうわけで、今回はちょっと頑張って、理想的ではない OP アンプをまず考えて、その上でどうすれば OP アンプを理想的とみなせるかということを考えてみたいと思います。

今、Fig. 1.3 のように負帰還が掛かっている回路を考えます。反転入力側に電圧  $v_2$  が印加され、抵抗  $R$  を挟んだ OP アンプの入力端子には  $v_{2in}$  の電圧が生じているとします。そうすると、抵抗  $R$  を流れる電流は以下のようになります。

$$i = \frac{v_2 - v_{2in}}{R}. \quad (1.4)$$

さらに、ここでは入力端子間の抵抗（入力インピーダンス）が  $\infty$  ではないとしているので、入力間抵抗  $R_{in}$  にも電流は流れます。これを  $i_{in}$  とします。そうすると、負帰還が掛かっている抵抗  $R_f$  の部分には、 $i - i_{in}$  の電流が流れ、以下の式で表せます。

$$i - i_{in} = \frac{v_{2in} - v_o}{R_f}. \quad (1.5)$$

また、電流  $i_{in}$  は以下の式で表せます。

$$i_{in} = \frac{v_{2in}}{R_{in}}. \quad (1.6)$$

出力電圧は eq. (1.1) のように表せますが、非反転入力  $v_1$  は接地してあるので、 $v_1 = 0$  として、

$$\begin{aligned} v_o &= A_{CM}(v_1 + v_{2in})/2 + A_o(v_1 - v_{2in}) \\ &= (A_{CM}/2 - A_o)v_{2in} = Av_{2in}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

ここで、 $v_{2in}$  の係数である利得をまとめて  $A$  とします。Eqs. (1.4), (1.6) および (1.7) を、eq. (1.5) に代入してがちゃがちゃと計算すると、以下のような形になります。

$$v_{2in} = \frac{R_f/R}{1 + (1/R + 1/R_{in})R_f - A} v_2. \quad (1.8)$$

ここで初めて理想的な OP アンプの概念の登場です。とりあえず利得の部分だけを考えると、同相利得  $A_{CM}$  が零で、開ループ利得  $A_o$  が無限大と考えます。このとき、eq. (1.8) の分子は OP アンプ外部の条件なのでとりあえず考えないとして、理想的な OP アンプの概念を加えて分母を見てみると、eq. (1.8) は、以下のようになり、確かに反転入力端子の電圧が、非反転入力端子と等電位になることがわかります。

$$v_{2in} \cong 0. \quad (1.9)$$

これがいわゆるイマジナリーショートです。実際には eq. (1.5) のように入力端子間が完全なる等電位ではなく微小な電圧差は発生しますが、OP アンプの利得  $A$  の大きさを考えると、理想的なものとして考えても良いという概念が通常は適用されているということです。

再び eqs. (1.4), (1.6) および (1.7) を eq. (1.5) に代入して、今度は出力電圧  $v_o$  を考えてみます。これもまずは理想的な OP アンプではなく、有限の利得  $A$  を持っているものとみなします。そしてこの式をがちゃがちゃとこねくりまわしますと、以下のような式が得られます。

$$\begin{aligned} v_o &= \frac{R_f/R}{\frac{1+(1/R+1/R_{in})R_f}{A} - 1} v_2, \\ &\cong -\frac{R_f}{R} v_2. \end{aligned} \quad (1.10)$$

こちららも最後は利得  $A$  を理想的な OP アンプとして考えると、よく知られた OP アンプの増幅率の計算で出てくる見慣れた式になります。このようにして、OP アンプの増幅率の計算が求まります。Eq. (1.10) に見られるように、反転増幅では、 $R$  と  $R_f$  の比がそのまま増幅率になります。

以上簡単ではありますが、イマジナリーショートは実は完全なる短絡ではないということを説明しました。実際に回路を考える際にはイマジナリーショートはあるものとして考えて良い

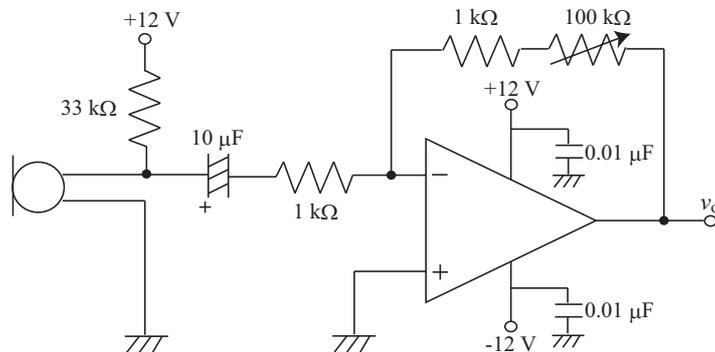


Fig. 1.4: マイクロフォン回路図

のですが、一度くらいは自分の手で理想的でない OP アンプの計算をし、こういったときに理想的な OP アンプとして考えることができるのかというのを確認してみるのが大切だと思います。ちなみに、実は今回出力インピーダンスのほうは無視して計算してしまったのですが、やる気のある人はぜひ出力インピーダンスを条件に加えて計算して見て下さい。さらには、今回は反転増幅ということで非反転入力に接地していたのですが、差動増幅のようになんらかの電圧を与えてあげても、きちんと計算すれば、入力端子間の微小な電圧差も計算でき、理想的な条件にしたとき初めてイマジナリーショートが適用できるということを確認できるはずですよ。

## 1.4 回路図

以上、コンデンサマイクロフォンと OP アンプの説明をざっとしたわけですが、これを組み合わせ合わせて自作のマイクロフォンを作りたいと思います。回路図が Fig. 1.4 です。すでに説明したように、まずコンデンサマイクロフォンに電源を供給してあげます。そしてその後に OP アンプによる負帰還を使った反転増幅を行います。今回は、増幅率を可変にする為に、100 kΩ の可変抵抗を使用します。ここで、可変抵抗の前に 1 kΩ の抵抗が付いていますが、これは可変抵抗を目一杯ひねると 0 kΩ になってしまい、増幅率が 0 になって出力電圧が出なくなるのを防ぐためです。すなわち、ここでは抵抗値の値から 1~101 倍に増幅される回路であるということが eq. (1.10) からすでにお分かりですね？この回路によって、コンデンサマイクロフォンで得られた微小な電圧が増幅されて、オシロスコープなどで観測できるくらいの電圧にすることが出来る！というわけです。なお、OP アンプの中央付近には電源端子が接続されていますが、ここからコンデンサを介して接地しています。これはバイパスコンデンサ（俗称パスコン）とって、コンデンサが交流に対して短絡的な扱いが出来ることを利用して、OP アンプに不要な交流成分を乗せないようにするためのものだと思って下さい。さらに、Fig. 1.5 に実体配線図を載せておきましたので、回路を作成する際に参考にして見て下さい。

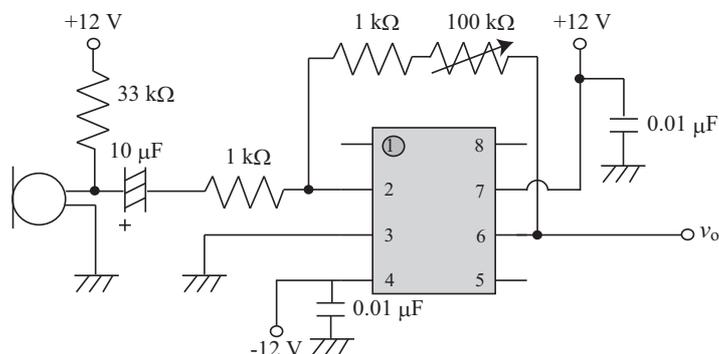


Fig. 1.5: マイクロフォン実体配線図

## 2 測定

皆さん、マイクroフォンは作れましたか？実際に自分の手で物を作るのはとても面白いものです。これから可愛いマイクroフォンちゃんがきちんと動くかを確認するために音を測定します。作るのも面白いですが、作った物がきちんと動いているのが見えるとさらに嬉しいですよ。

### 2.1 指向特性および周波数特性

さて、ではマイクroフォンも揃ったことだし、音響研らしく音を測定します。音を見よう！というわけです。正確に言えば、音の振動を電圧に変換した信号を見る、ということを行います。中でも今回注目するのは、音の指向特性および周波数特性というものです。理論的には他の講義で説明があるので、ここでは簡単な説明をします。指向特性とは、方向によって伝搬する音の強さが異なることです。通常はスピーカなどでは振動面に対して正面方向が一番音圧が強くなり、正面から離れるに従って音圧が小さくなります。そして、周波数特性とは入力電圧を一定にし、周波数を変化させると出力電圧が変化することです。この原因の一つは、先ほど皆さんが作ったマイクroフォンの中に OP アンプ自身にも周波数特性があることが挙げられます。OP アンプで電圧を増幅する際に、余りにも高い周波数では増幅が追いつかなくなります。このために周波数が高い帯域では出力が歪みます。他にも理由はありますが、とにかく、スピーカやマイクroフォンは、機械的、電気的な要因により全ての周波数帯域で一定の出力を得られません。だからこそ、各製品によって性質が異なるわけです。これは、用途に応じて最適な製品を使う必要があるということを意味しています。音を研究する第一歩として、これを把握することが何よりも重要です。音楽を聴くためか、研究に使うためかという選択でも、全く違うスピーカやマイクroフォンが必要になります。それは今後ゆっくりと各自勉強して行って下さい。この実験の目的は、指向特性と周波数特性を簡単に測定してみることにあります。

ではでは、やってみましょう！！

### 2.2 距離測定

応用として音を使って距離を測定してみます。原理は書きません。各自考えてみましょう！

## 第II部

# デジタル実験

本実験の目的は、LabVIEW を使用してデジタルデータを取得し、さらに、簡単な信号処理を行うことである。ある物理現象のデジタルデータ取得の概要は、まず、センサにより物理現象を測定しアナログ電圧信号に変換する。次にアナログ信号をデジタル信号に変換し、最後にそのデジタル信号を PC などの記憶装置に記録する。以上のような流れになる。これらの操作を行うためには、実験機材の使用法、LabVIEW の使用法を理解することが求められる。

そのため、本テキストでは、実験機材とその使用法を紹介し、また、計測用ソフト「LabVIEW」の概要について説明した後に、実際の PC 画面を示しつつ、操作法を説明する。

### 3 実験機材と使用方法

本章では、実験機材の種類の紹介とそれらの取り扱い方法について簡単に説明する。

研究室にはノート PC が十数台あり、それらには実験に必要なソフト (LabVIEW) がインストールされている。ただし、そのバージョンは機材によって異なるため、自分が使用したい PC を探す必要がある。ただし、これから新しく LabVIEW を学ぶ人は、できるだけ最新のバージョンを使用することを勧める。その理由は、便利な機能がたくさん入っているからである。

しかし、PC のみではデジタルデータを取得することはできない。アナログデータを量子化するため、アナログ-デジタル (以下、A-D と略す) 変換を行う必要がある。また、PC で作成した任意の波形を使用したいときは D-A 変換を行う必要がある。これらの操作を行うことができるのが、DAQ カードや、PXI, MXI という機材である。これらの数量は非常に限られているため、使用時には破損しないように特に注意が必要である。また、オシロスコープやファンクションジェネレータでも A-D や D-A 変換 (もしくはそれに近いこと) を行うことができる。

### 4 LabVIEW とは

本章では計測用ソフト「LabVIEW」の概要を説明する。

「LabVIEW」とは、PC 上で仮想的に計測機材を使用することができるソフトである。すなわち、PC のモニタ上にオシロスコープやスペクトルアナライザの画面を出したり、ファンクションジェネレータのように信号を生成したりできるということである。他にも、オシロスコープやファンクションジェネレータを制御することもできる。

LabVIEW によるプログラミングは特徴的な手法をとっており、「VI」と呼ばれるブロックを結線していくような方法でプログラムを構築する。VI の種類によって必要な結線数やその種類は豊富であり、これらを良く把握することが LabVIEW 上達のコツであるともいえる。また、基本的な測定に関してはサンプルが用意されており、これを応用して、所望のプログラムを作成することも可能である。関連書籍も出版されているため、必要に応じて参考にするといよい。

## 5 実験の手引き

### 5.1 使用機材

ノート PC(LabVIEW 入り), DAQ カード・ケーブル・端子台セット, マイクロホン, マイクアンプ, 電源, オシロスコープ

### 5.2 機材の接続

- (1) マイクとマイクアンプに電源をつなぎ, オシロスコープで動作確認
  - (2) DAQ カードと端子台を専用ケーブルでまっすぐに接続
  - (3) DAQ カードをノート PC の PC カードスロットにまっすぐ挿入
  - (4) 端子台の 68 番と 34 番に接続されている BNC ジャックに, マイクの出力を接続
- ※どの端子がどの役割を担っているのかは DAQ カードの Users Manual を参照

### 5.3 プログラムの作成

#### 5.3.1 DAQ カード制御 VI “DAQ アシスタント”

- (1) Labview の起動して, ブランク VI を選択
- (2) 白い画面 (ブロックダイアグラム) で右クリック→Express→入力→DAQ アシスタント
- (3) 信号を入力→アナログ入力→電圧→ai0→終了

#### 5.3.2 計測電圧表示 VI “波形グラフ”

- (1) 灰色のほうの画面 (フロントパネル) で右クリック→グラフ→波形グラフ
- (2) ブロックダイアグラムで DAQ アシスタント右側端子「データ」と波形グラフの入力を接続  
完成形を Fig. 5.1 に示す.

### 5.4 データ計測

フロントパネル, もしくはブロックダイアグラムのツールバー内にある「右向き矢印」をクリックすると計測が開始され, 計測終了後, 自動的に停止する. 「回転矢印」をクリックすると赤い「停止ボタン」をクリックするまでプログラムが連続実行される.

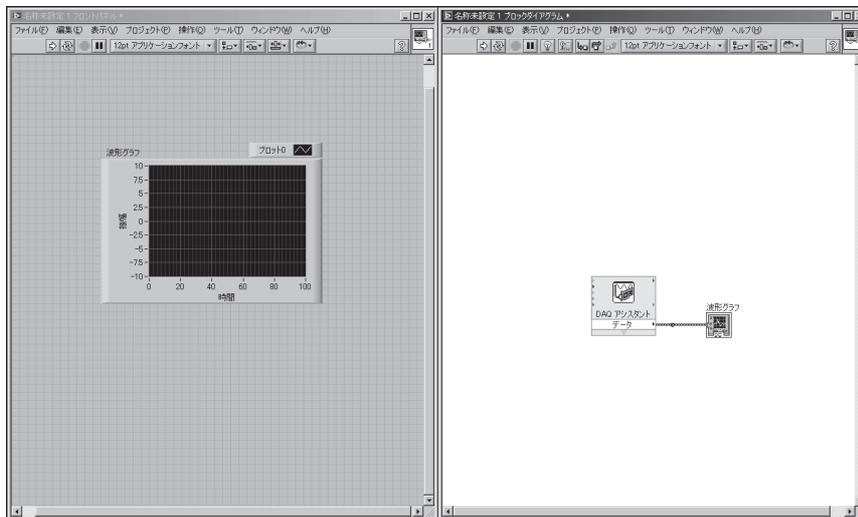


Fig. 5.1: DAQ アシスタント及び波形グラフ配置図

## 6 サンプルレートとサンプル数

DAQ アシスタントの設定画面を Fig. 6.1 に示す。サンプルレートは「1 秒間に何個のデータを取得するか」ということである。100 Hz ならば 1 秒間に 100 個のデータ点を取得するということになる。また、サンプル数は「データをいくつ取ったら計測をやめるか」を設定する部分である。従って、サンプルレートが 100 Hz でサンプル数が 1000 個の場合には、計測に要する時間は 10 秒間ということになる。

ここで、500 Hz の音波を計測することを考える。サンプリング定理によればサンプリングレートが 1 kHz 以上ならば計測信号を復元することができる。それ以下の場合にはエイリアス信号が発生する。そこで、サンプリングレートを 20000, 800 (Hz) にして計測を行う。また、計測時間は 0.1 秒間になるように設定する。設定は DAQ アシスタントの設定画面下部にある、タイミング設定で行う。

### 6.1 スペクトル計測

以下の手順でパワースペクトル計測のプログラムを作成する。

- (1) ブロックダイアグラムで右クリック → Express → 信号解析 → スペクトル計測
- (2) トグルをパワースペクトルに変更
- (3) Fig. 6.2 のように接続
- (4) 計測開始

結果を見ると、サンプリングレートが 20 kHz の場合には、正弦波が測定され、スペクトルのピークが 500 Hz に現れる (Fig. 6.3)。しかし、800 Hz の場合には正弦波は振幅変調されたような形になり、スペクトルのピークは 300 Hz に現れてしまい、500 Hz の正弦波を測定しているとはいえない状況になってしまう (Fig. 6.4)。

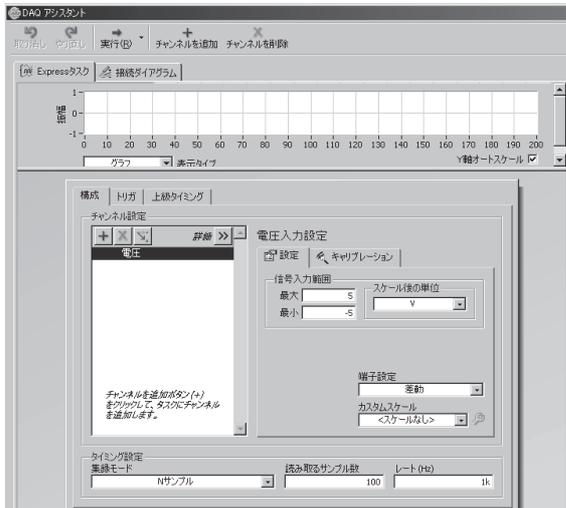


Fig. 6.1: DAQ アシスタントの設定画面

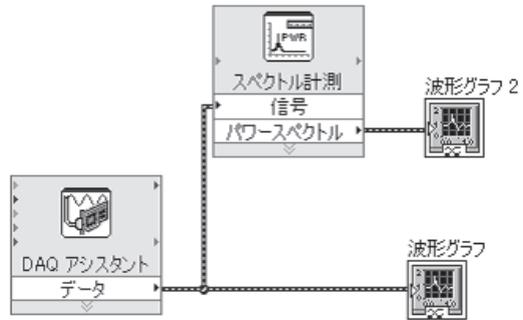


Fig. 6.2: スペクトル計測配置

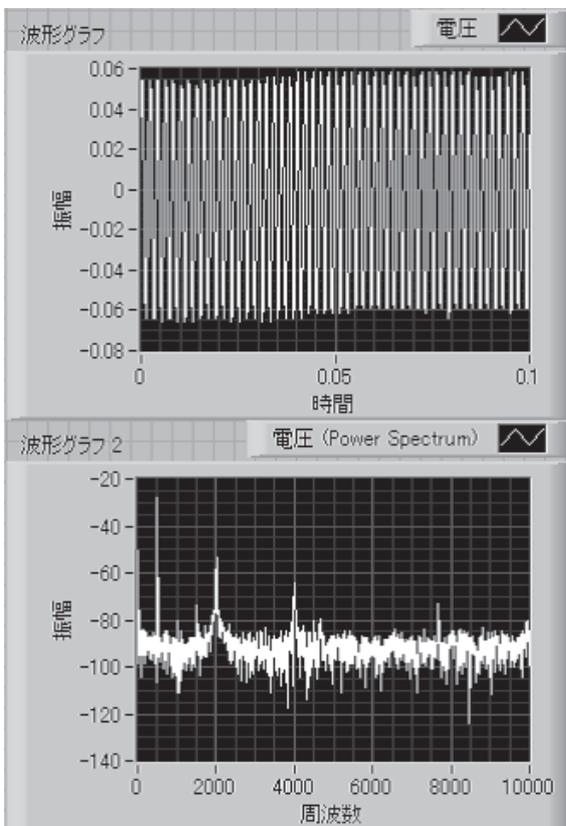


Fig. 6.3: サンプリングレート 20 kHz

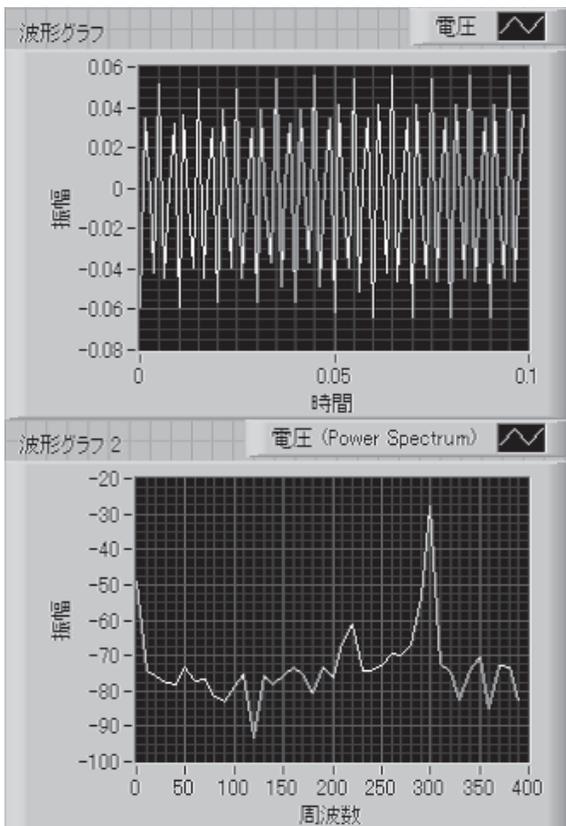


Fig. 6.4: サンプリングレート 800 Hz

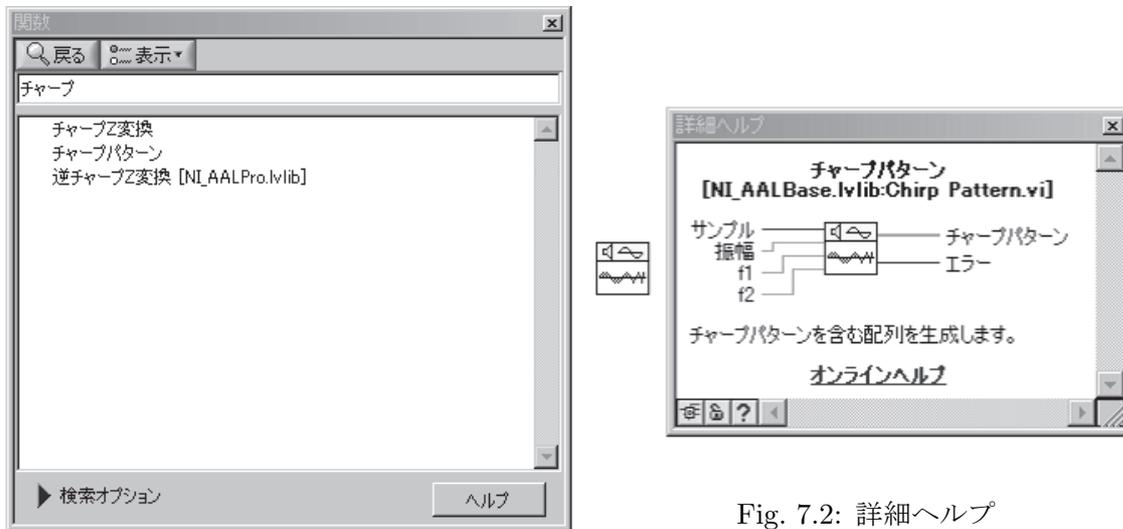


Fig. 7.1: 検索

Fig. 7.2: 詳細ヘルプ

## 7 応用：伝搬時間計測実験

本章では、LabVIEW を用いる応用的な実験として、音波伝搬時間の計測を行う。そのために、「チャープパターン」、波形作成、「コンボリューションと相関」を新たに使用し、さらに音波送信用の DAQ アシスタントを使用する。

### 7.1 プログラムの作成

プログラムの内容は、以下の流れになる。

- (1) 「チャープパターン」でチャープ信号を作成
- (2) 「波形を作成」でチャープ信号を時間波形に変換
- (3) 「DAQ アシスタント」で D-A 変換し、スピーカから音を送信
- (4) マイクの受信信号を「DAQ アシスタント」で A-D 変換
- (5) 取得したデータを時間波形に変換
- (6) 入力波形と取得波形の相互相関から音波伝搬時間を計算

まず、これらの vi がどのパレット内にあるのかを探す必要がある。そこで、検索機能を用いることにする。そのためにはいずれかの画面上で右クリックをしたときに現れる関数パレットの右上にある、検索ボタンをクリックする。これによって現れる検索ウィンドウを Fig. 7.1 に示す。次に、各 vi の使用方法を理解する必要がある。そこで画面上部コマンドバー内の、ヘルプボタンから詳細ヘルプを選択する。これにより vi の簡単な使用法が表示される (Fig. 7.2)。それでも使用方法がわからない場合には、オンラインヘルプを参照する (Fig. 7.3)。DAQ アシスタントによる音波の送信方法は、基本的には受信方法と同じである。

・信号を入力→アナログ入力→電圧→ao0→終了

と設定する。ao0 に対応する端子は 22 番、55 番である。最終的に Fig. 7.4 のようになる。

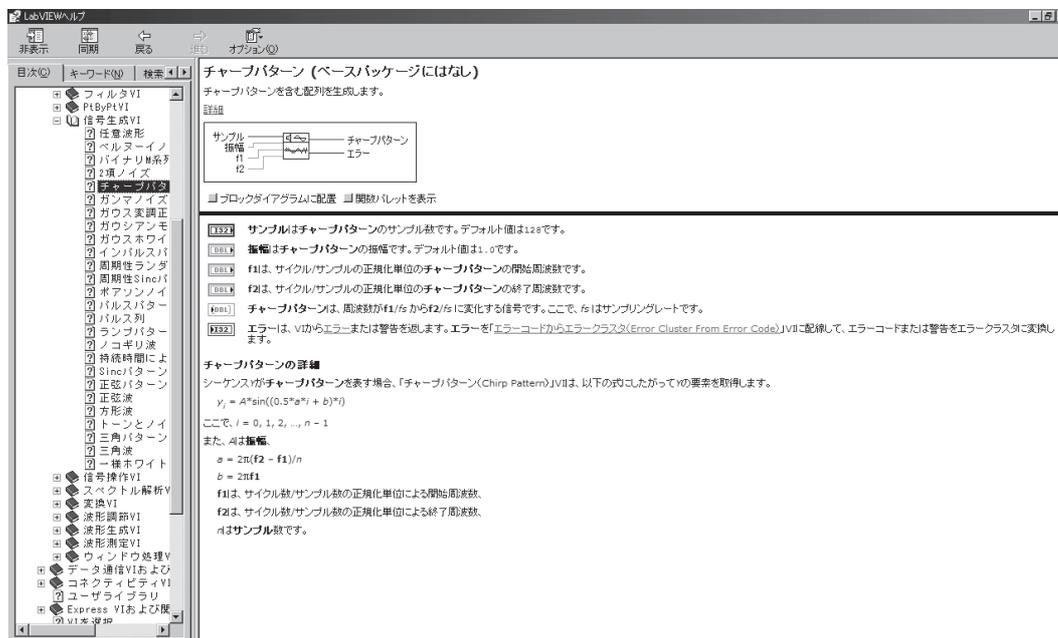


Fig. 7.3: オンラインヘルプ

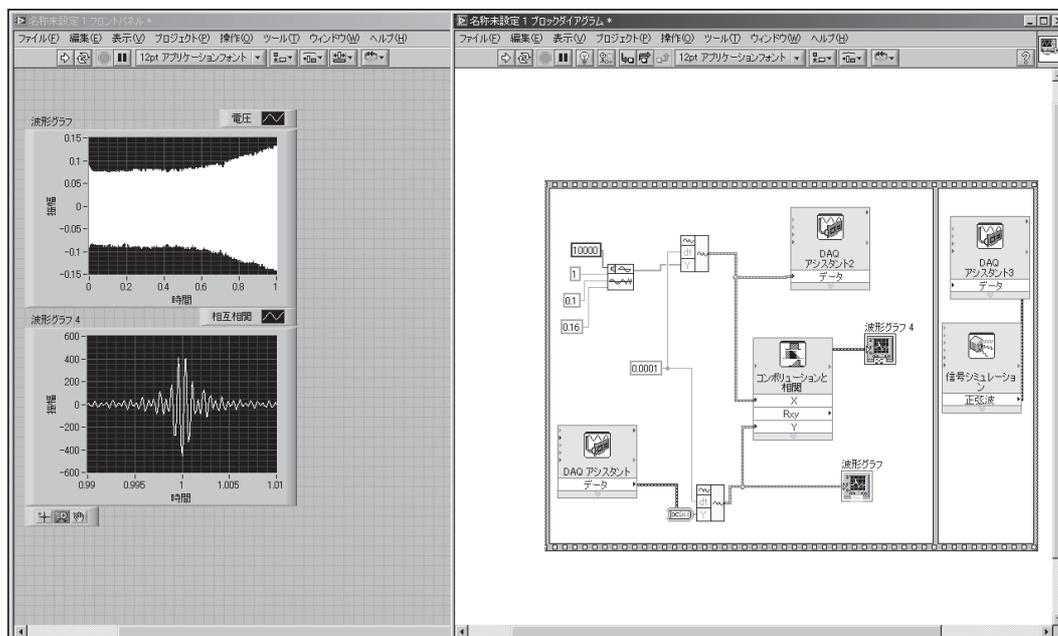


Fig. 7.4: 伝搬時間計測配置図

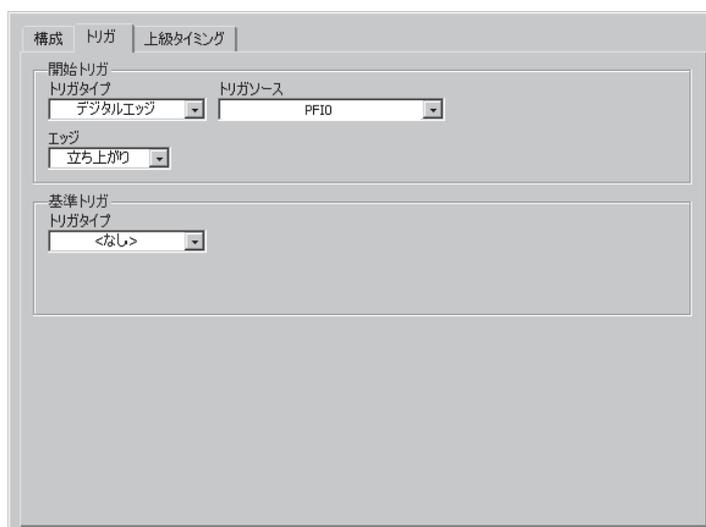


Fig. 7.5: トリガ設定画面

## 7.2 トリガの設定

何度か計測を行うと相互相関結果のピーク位置が一箇所に定まっていないことがわかる。この原因は何であろうか。

この原因は、送信開始時刻と、受信開始時刻の同期が取られていないことにある。そこで、両者の同期を取り、開始時刻を合わせる必要となる。この操作を「トリガをかける」という。

DAQアシスタント内のトリガ設定機能を用いてトリガをかける。まず、トリガタブを選択する。そして、トリガタイプをデジタルエッジに、トリガソースをPF10に、エッジを立ち上がりにする。以上の設定を2つのDAQアシスタントに行う (Fig. 7.5)。

再び計測を実施すると、ピーク的位置が変化しないことがわかる。しかし、スピーカとマイクの位置を変化させてもピーク位置が変化しないように見える。そこで、ピーク付近を拡大する。

- (1) グラフ上で右クリック→Xスケール→形式と精度
- (2) スケール→自動スケールチェックをはずす→最小 0.99, 最大 1.01 に変更

以上の操作後に再度計測を行うと、マイクとスピーカが遠い方が相関のピークが1からずれている (Fig. 7.6 及び Fig. 7.7)。このピークを検出することで、伝搬時間を求めることができる。

## 7.3 データの記録 “計測ファイルへ書き込み”

計測結果を保存するには「計測ファイルへ書き込み」を以下の手順で使用する。

- (1) 白いほうの画面で右クリック→Express→出力→計測ファイルへ書き込み
  - (2) ファイル名に保存先を指定
  - (3) 一連のファイルに保存トグルをON
  - (4) セグメントヘッダのヘッダなしトグルをON→OK
  - (5) 保存したい線を枝分かれさせて、計測ファイルへ書き込みの「信号」へ入力
- 以上の操作を行った後、計測を行うと指定したフォルダにデータが保存される。

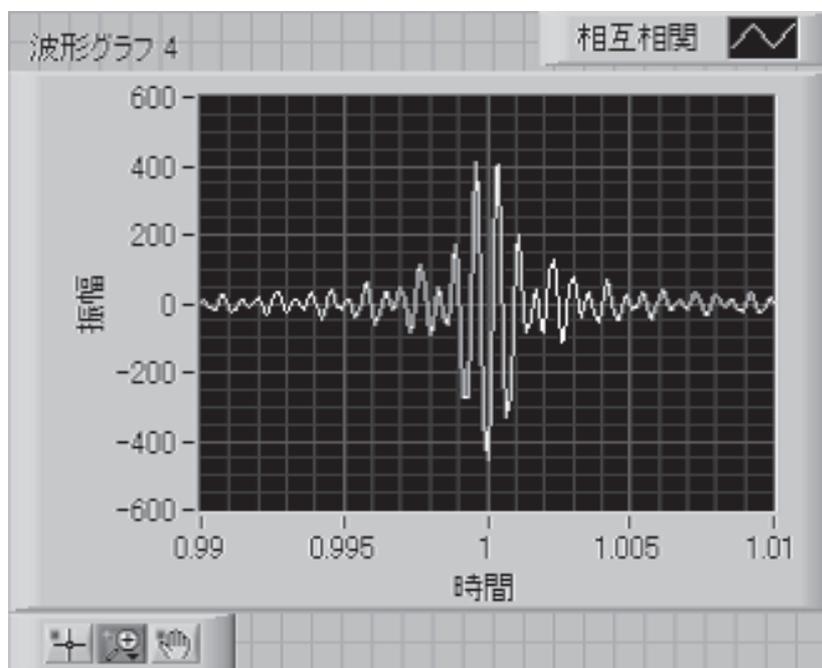


Fig. 7.6: マイクがスピーカ直前の場合

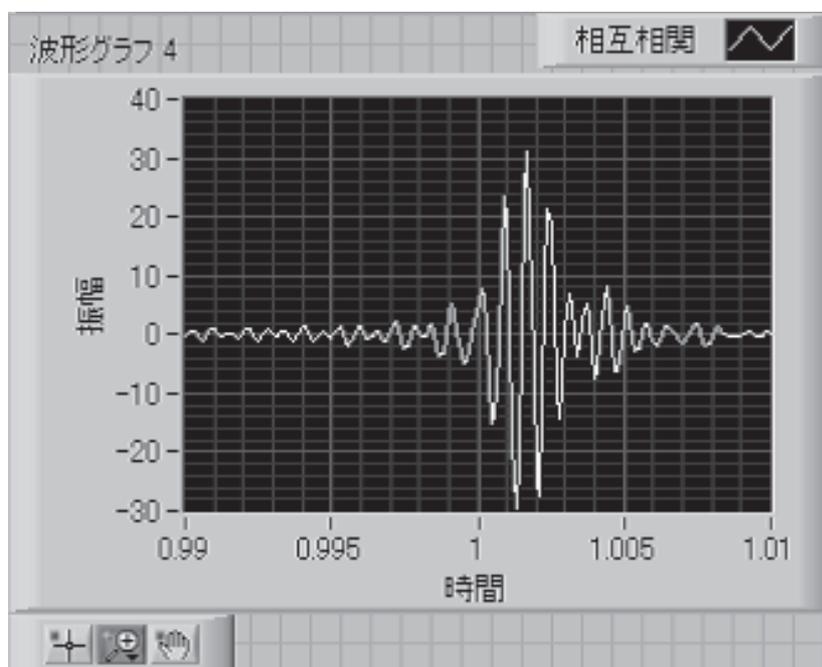


Fig. 7.7: マイクがスピーカから離れている場合

## 第 III 部

## 信号処理入門

## 8 信号の表現

## 8.1 信号の定義

信号 (Signal) とは, ある情報を伝達のために記号や符号を用いて表現したものである. 我々は信号として, 音, 電磁波, 電圧, 磁力等を主に利用している.

## 【信号とその例】

音	言葉 (人の声, イルカの声, コウモリの声, etc.), 楽器など
電磁波	無線通信機器 (携帯電話, 無線 LAN, etc.), リモコンなど
電圧	電気信号 (固定電話, Ethernet, etc.), 電子回路など
磁力	磁気ストライプ (カード, VHS, etc.), HDD など

また, 信号を別の信号に変換することも日常的によく用いられている.

## 【信号の変換例】

音圧-電圧変換	スピーカ, マイクロホン, 圧電素子
電磁波-電圧変換	アンテナ
電磁波-電流変換	ソーラーパネル, フォトトランジスタ

計測工学の分野では, これらの信号を用いて何らかの物理量を計測する. 単純な信号の利用例として, 歪みゲージ (Fig. 8.1) が挙げられる. 歪みゲージは, 歪みを測定したい物体に貼り付けて使用する. 物体が歪むと, 歪みゲージも一緒に変形し, 電気抵抗が変化する. この電気抵抗と物体の歪みにはある範囲までほぼ線形な関係があることから, 電気抵抗の変化から歪みを測定することができる. なお, 抵抗の変化は微小なので, 実際にはブリッジ回路などを用いて電圧の変化に変換する. この場合, 電圧の変化が信号であり, その信号を元に歪みという物理量を計測していることになる.



Fig. 8.1: 歪みゲージ

## 8.2 信号の領域

原点にある点音源から一次元に進行してくる平面波音圧  $p$  を考える.  $p$  は以下の式で表される.

$$p(t, x) = A \sin(2\pi ft - kx), \quad (8.1)$$

ただし,  $c$  は音速,  $t$  は時間,  $x$  は音源と観測点との距離,  $f$  は周波数,  $k = 2\pi f/c$  は波数,  $A$  は音圧振幅である. ここで, 音圧  $p$  は時間  $t$  と空間  $x$  の 2 つの変数を有することに注目しよう.

そして、 $x = 0$  のように位置を固定した場合の音圧  $p$  は時間のみに依存性を示す。すなわち、

$$p(t) = A \sin 2\pi ft. \quad (8.2)$$

$p(t)$  は一次元の信号で、ある点における信号  $p$  の時間領域での変化に相当する。

一方、 $t = 0$  での音圧  $p$  は空間のみに依存性を示す。すなわち、

$$p(x) = A \sin(-kx). \quad (8.3)$$

$p(t)$  は一次元の信号で、ある時間における信号  $p$  の空間領域での変化に相当する。 $x$  は多次元変数であると、 $p(x)$  も多次元の信号となる。

更に、フーリエ変換（第9.2節）を用いると信号  $p$  は周波数領域で表現することができる。以降においては、時間領域、空間領域、周波数領域、それぞれの信号を身近な例を用いて示す。

### 8.2.1 信号の時間領域における表現

オシロスコープは信号を時間領域で観察することのできる機器である。通常のオシロスコープの画面（Fig. 8.2）に表示される信号の横軸は時間、縦軸は電圧となっている。

他の身近な例では Windows のタスクマネージャで表示することのできる CPU 利用率も時間領域におけるグラフとなっている。

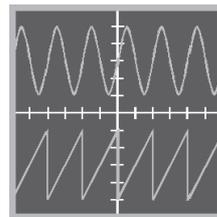


Fig. 8.2: オシロスコープの信号

### 8.2.2 信号の時間-周波数領域における表現

楽譜（Fig. 8.3）は時間-周波数領域におけるグラフと解釈することができる。楽譜の横軸は時間、縦軸は音高を表している。ここで音高とは、所謂周波数（Table I）であることから、楽譜の縦軸は周波数に相当する。このように時間と周波数2つの領域を用いて信号を表現することを、信号の時間-周波数領域における表現という。



Fig. 8.3: 楽譜

Table I: 音高と周波数の関係（オクターブ No.3）

音高（音名）	C	D	E	F	G	A
周波数 [Hz]	261.6255	293.6647	329.6275	349.2282	391.9954	440.0000

### 8.2.3 信号の空間領域における表現

テレビ (Fig. 8.4) は信号を空間領域で表現する機器である。動画は静止画を高速に連続させることで再現できることが知られている。映像信号は、ある時間において受光素子から得られた二次元平面のデータ (フレーム) を一次元に並べ直したベクトルを、高速に連続させたものである。送られてきた映像信号を、テレビは同期信号によってフレーム毎に表示し、1秒間に 29.97 回 (NTSC 方式の場合) 更新することで画面を時間的に変化させる。すなわち、フレームそのものは時間要素を持っていないことから、空間領域で表現された信号であることが分かる。



Fig. 8.4: テレビ

## 8.3 連続時間信号と離散時間信号

時間領域で信号を考えると、連続時間信号 (Continuous-time signal) と離散時間信号 (Discrete-time signal) に大きく分類される。ここでは連続時間信号と離散時間信号の概念を説明する。

### 8.3.1 連続時間信号

時間的に連続な信号を連続時間信号といい、時間変数  $t$  の関数として表される。連続時間信号のうち、振幅も連続なものをアナログ信号、振幅が離散化されているものを多値信号という (Fig. 8.5 参照)。これ以降は連続時間信号としてアナログ信号に着目する。アナログ信号は電子回路等にて用いられる信号で、例えばオペアンプ等により簡単な演算などを行うことができる。

### 8.3.2 離散時間信号

時間的に離散な信号を離散時間信号という。連続信号を無限に続く点の集合とイメージすると、離散時間信号はある時間間隔  $T$  毎に値を取って (サンプリングという) 並べた数列に相当する。連続信号と異なり有限のデータ量となるため、計算機による演算などでは主に離散時間信号が用いられる。離散時間信号のうち、振幅が連続なものをサンプル値信号 (標本化信号)、振幅も離散化したものをデジタル信号という (Fig. 8.5 参照)。また、時間間隔  $T$  毎にサンプリングを行う場合、その頻度をサンプリング周波数  $f_s$  という。ただし、 $f_s = 1/T$ 。これ以降は離散時間信号として振幅も離散的なデジタル信号に着目する。デジタル信号はデジタル信号処理等において用いられる信号で、アナログ信号処理と比較してより複雑な演算ができる。

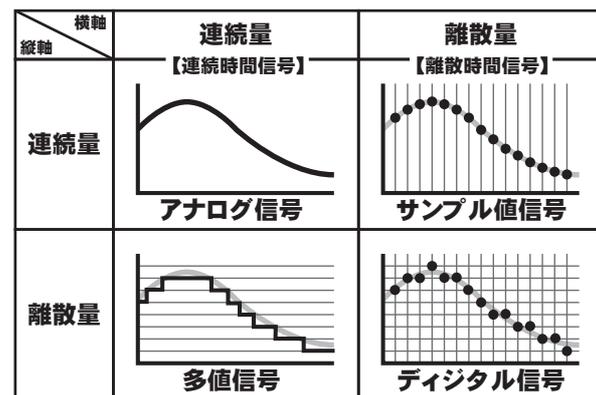


Fig. 8.5: 連続時間信号と離散時間信号

## 8.4 A/D, D/A 変換とサンプリング定理

### 8.4.1 A/D, D/A 変換

アナログ信号からデジタル信号への変換を A/D 変換, デジタル信号からアナログ信号 (実際には多値信号であるが) への変換を D/A 変換という。

音響通信システムを例に A/D 変換と D/A 変換について簡単に説明する。音響通信は Fig. 8.6 に示す流れで実現される。まず, あるデータ列を変調して信号を作成する。この信号を送信器から送信する。受信器によって受信された受信波を復調し, データ列を復元する。

ここで, 送信信号の作成と受信信号の処理は, それぞれ Fig. 8.7, Fig. 8.8 のように計算機上で行う。つまり, デジタル信号を用いる必要がある。ところが, 送信器と受信器はアナログ信号によって制御される。そこで, 計算機と送信器・受信器の間に信号変換器を挿入している。Fig. 8.6 にある DAC, ADC がそれに該当し, それぞれが D/A 変換器, A/D 変換器となっている。この変換器は実際には PC カード (6062E, National Instruments) で, 一枚のカードで D/A, A/D 変換が両方行えるようになっている。詳しくは「デジタル実験」で確認されたい。

### 8.4.2 サンプリング定理

第 8.3.2 小節でサンプリングについては簡単に述べたが, ここでは「サンプリング定理 (標本化定理, シヤノン・染谷の定理)」という重要な定理について説明する。サンプリング定理自体は 1928 年にナイキスト (Nyquist) によってその存在が予言され, 1949 年にシャノン (Shannon), 染谷によってそれぞれ独立に証明されている。

**サンプリング定理:** 連続時間信号の有する最大周波数の 2 倍より大きな周波数でサンプリングを行えば, 忠実に元の連続時間信号を復元できる。

このサンプリング定理は, 「最大周波数  $f$  の連続時間信号をサンプリングして離散時間信号にする。この時, サンプリング周波数が  $2f$  より大きければ, 離散時間信号の情報から元の信号を完全に復元することができる」ということを意味する。例えば, 音楽 CD に収められている曲は, サンプリング周波数 44.1 kHz で録音されたデジタル信号である。スピーカやヘッドホン はアナログ信号によって駆動されるので, CD のデジタル信号はコンポの D/A 変換器によってアナログ信号に変換される。この時, サンプリング定理によって 22.05 kHz までの波形を忠実に復元できることが保証されている。この 22.05 kHz は所謂人間の可聴域の上限である。つまり, CD は人間の聞こえる範囲の音に限っては忠実に原音を復元できるような離散時間信号が記録されている媒体であるといえる。

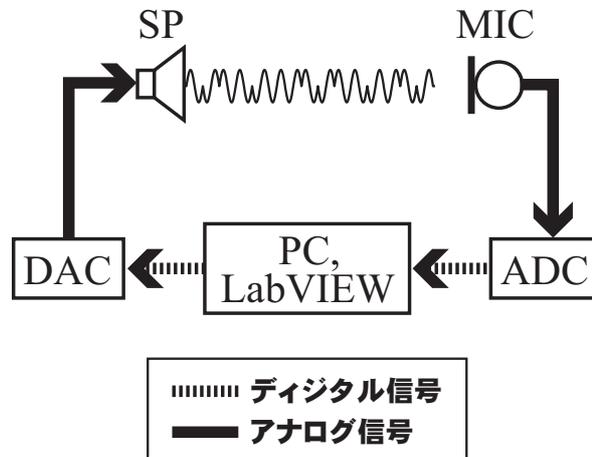


Fig. 8.6: 音響通信システムの一例

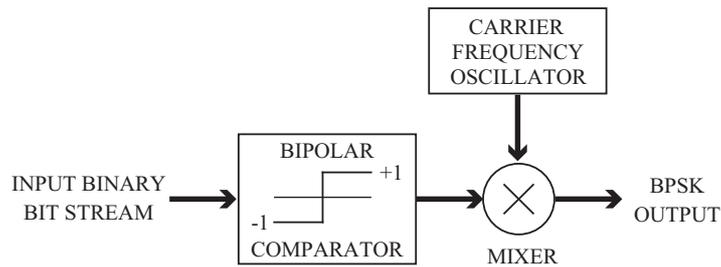


Fig. 8.7: 送信信号の作成 (デジタル信号処理)

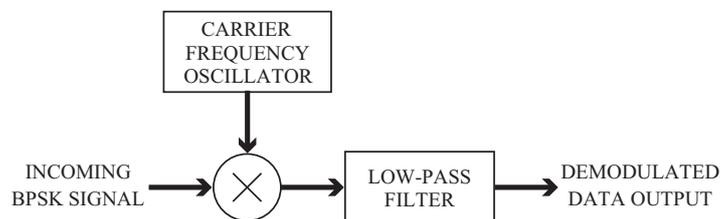


Fig. 8.8: 受信信号の処理 (デジタル信号処理)

## 9 信号処理

信号処理とは、信号を数学的に加工することで、得られた信号を工学的に有用な情報へと変換することをいう。ここでは基礎的な信号処理として、相関関数、フーリエ変換、畳み込みについて扱っていく。

### 9.1 相関関数

相関関数 (Correlation function) とは、2つの関数がどれだけ似ているか (類似度) を数値的に表すことをいう。数学の復習をしながら、相関関数について確認していこう。

#### 9.1.1 積

相関関数は、原則的には一つの単純な積にまつわる法則を基にしている。ここでは単純なスカラー同士の積を考える。スカラーは「正」、「負」、「零」いずれかの性質を持つ。このうち、「正」と「負」は互いに対となる性質であり、「零」は「正」「負」どちらにも属さない。

スカラー  $x$  と  $y$  を考える。  $x$  と  $y$  の積を  $z$  とするとき、

- $z > 0$  ならば  $x, y$  は同符号.
- $z < 0$  ならば  $x, y$  は異符号.
- $z = 0$  ならば少なくとも  $x, y$  のうちどちらかは零.

同符号であるということは、 $x$  と  $y$  は互いに類似した性質を有していることが分かる。逆に異符号の場合、 $x$  と  $y$  は互いに異なる性質を有していることが分かる。積が零の場合、少なくとも片方は「正」「負」どちらにも属さないことから、 $x$  と  $y$  はそもそも比較できない。

#### 9.1.2 内積

ここではユークリッド空間におけるベクトルの内積を考える。ベクトル  $X, Y$  をそれぞれ  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  とする (ただし、 $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$  はスカラー)。この時、 $X$  と  $Y$  の内積は以下の式で表される。

$$X \cdot Y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n, \quad (9.1)$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i y_i. \quad (9.2)$$

つまり、内積はベクトルの要素毎に積を取ってその和を取る操作に相当する。ここで、ベクトルはそのまま信号と解釈できる。つまり、内積は2つの信号の要素同士の積和となる。

同様に，連続時間信号  $x(t), y(t)$  の場合，内積  $z(t)$  は

$$z = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t)dt. \quad (9.3)$$

で表される． $z(t)$  は  $x(t)$  と  $y(t)$  の相関値ともいう．この内積から分かる性質として

- $X \cdot Y > 0$  ならば  $X, Y$  は同傾向．
- $X \cdot Y < 0$  ならば  $X, Y$  は異なる傾向．
- $X \cdot Y = 0$  ならば  $X, Y$  はそもそも比較対象でない．

ことが挙げられる．ここでは具体例を用いて考えよう．次のようなベクトル  $X_1 \sim X_4$  を考える．

$$X_1 = (0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0), \quad (9.4)$$

$$X_2 = (0, 2, 0, -2, 0, 2, 0, -2, 0), \quad (9.5)$$

$$X_3 = (0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0), \quad (9.6)$$

$$X_4 = (1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1). \quad (9.7)$$

$X_1 \sim X_4$  はそれぞれ Fig. 9.1 の波形をサンプリングした結果と考える．この時， $X_1$  と  $X_2, X_3, X_4$  の内積はそれぞれ，

$$X_1 \cdot X_2 = 8, \quad (9.8)$$

$$X_1 \cdot X_3 = -4, \quad (9.9)$$

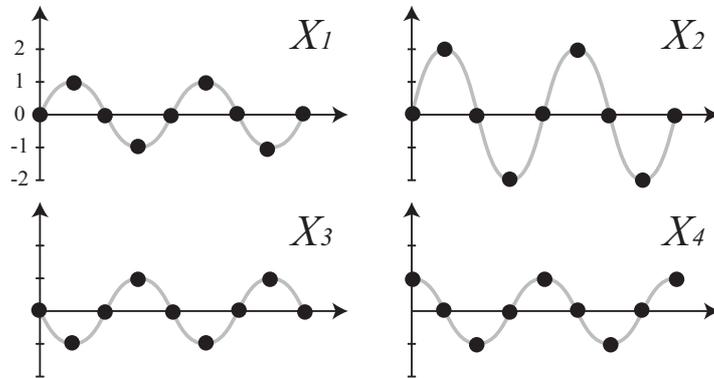
$$X_1 \cdot X_4 = 0. \quad (9.10)$$

となっていることから，以下の性質が明らかになる．

- $X_1$  と  $X_2$  は内積の符号が正なので，同傾向である．
- $X_1$  と  $X_3$  は内積の符号が負なので，逆の傾向である．
- $X_1$  と  $X_4$  は零なので，比較できない．

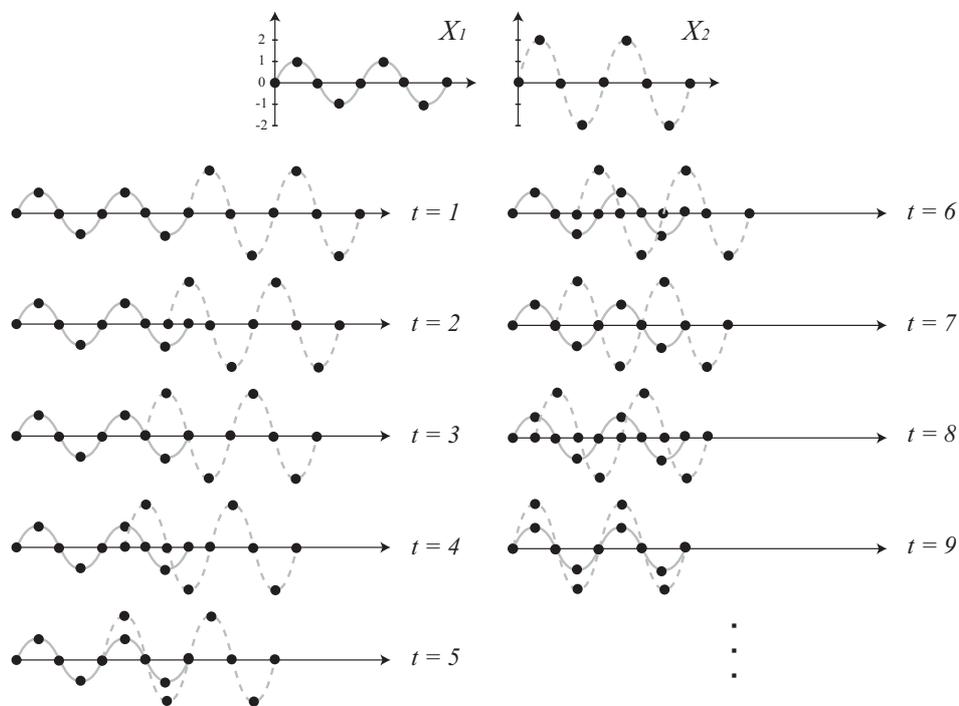
実際に， $X_2$  は  $X_1$  の各要素を2倍したものに等しく， $X_3$  は  $X_1$  の各要素の符号を反転させたものに等しい．しかし， $X_4$  は各要素を何倍しても，符号を反転させても  $X_1$  には等しくならない．これを直交しているという<sup>1</sup>．

<sup>1</sup> $X_1$  と  $X_4$  は正弦波と余弦波に相当する．この2つの波形は直交関係にあるため，通信分野では重宝されている．

Fig. 9.1: 信号  $X_1, X_2, X_3, X_4$ 

### 9.1.3 相関関数

内積は、2つの信号をそのまま掛け合わせた場合、どれくらい類似しているかを示す指標である。ここでは、第9.1.2小節で用いた信号  $X_1$  と  $X_2$  の相関関数  $C_{XY}(t)$  を求めてみよう。  $C_{XY}(t)$  は Fig. 9.2 のように、2つの信号を少しずつずらしながらそれぞれの内積を取る操作をいう。

Fig. 9.2: 信号  $X_1$  と  $X_2$  の相関関数

これを式で表すと

$$C_{XY}(t) = \frac{1}{n}(x_1y_{1+t} + x_1y_{2+t} + \dots + x_1y_{n+t}). \quad (9.11)$$

ただし、存在しない信号値については0埋めを行う。

これを計算すると、

$$C_{XY} = (0, 0, -2, 0, 4, 0, -6, 0, 8, 0, -6, 0, 4, 0, -2, 0, 0), \quad (9.12)$$

となる。それをグラフに表すと、Fig. 9.3 のようになる。

ここから分かることは

- $X_2$  を 5, 9, 13 ずらすと相関関数の値が正になるので、同じ傾向である。
- とりわけ、 $X_2$  を 9 ずらした時の相関関数値は最大となるので、最も傾向が似ている。
- $X_2$  を 3, 7, 11, 15 ずらすと相関関数の値が負になるので、逆の傾向である。

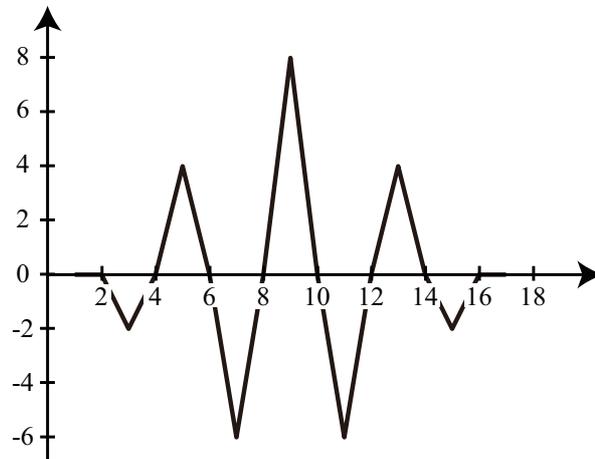


Fig. 9.3: 信号  $X_1$  と  $X_2$  の相関関数  $C_{XY}$

ここで、相関関数は相関を取る信号によって名前が異なるので、以下にまとめておく。

- 同じ信号の相関関数を、**自己相関関数 (Auto-correlation function)** という。
- 異なる信号の相関関数を、**相互相関関数 (Cross-correlation function)** という。

相関関数の一般式を示して、この小節を終わりにする。

信号  $x(t)$  と  $y(t)$  が連続時間信号の場合、相関関数  $C(\tau)$  は

$$C(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\overline{y(t+\tau)}dt, \quad (9.13)$$

で表すことができる。

信号  $x(t)$  と  $y(t)$  が、それぞれ離散時間信号  $x(t_n), y(t_n)$  の場合、相関関数  $C(k)$  は

$$C(k) = \sum_{k=1}^N x(t_n)\overline{y(t_n+k)}. \quad (9.14)$$

ここで、 $\overline{y(t+\tau)}$  は  $y(t+\tau)$  の複素共役を表す。また、 $x(t_n), y(t_n)$  それぞれの信号長を  $N_x, N_y$  とすると、 $C(k)$  の信号長は  $N_x + N_y - 1$  になる。なお、信号の成分がスカラーの場合は気にしなくてもよいが、複素信号の場合は複素共役を忘れると大変なことになるので注意されたい。

## 9.2 フーリエ変換

本節ではフーリエ変換について扱う。フーリエ変換は、相関関数の概念をもちいて理解することができる。一方、級数展開により求めることもできる。そこで、相関関数を用いてフーリエ変換の概要を説明した後、自習用として級数展開によるフーリエ変換についてまとめておく。

### 9.2.1 フーリエ変換の概要

フーリエ変換は時間領域の信号を周波数領域の信号に変換するための関数変換手法である。よく教科書などでは時間領域から周波数領域への写像、と説明されていることも多い。時間領域信号  $x(t)$  は、以下の演算により周波数領域信号  $X(f)$  に変換することができる。

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt. \quad (9.15)$$

ただし、 $j$  は虚数単位 ( $j = \sqrt{-1}$ )。また、周波数領域信号  $X(f)$  から時間領域信号  $x(t)$  に戻すには逆フーリエ変換として以下の演算を行えばよい。

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \exp(j2\pi ft) df. \quad (9.16)$$

まずはフーリエ変換と逆フーリエ変換の定義式を示した。次に、実際に eq. (9.15) が信号  $x(t)$  にどのような操作をするのかを見ていこう。ここで、第 9.1.3 節で定義した eq. (9.3) を再掲する。

$$z = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t)dt. \quad (9.3')$$

$y(t) = \exp(-j2\pi ft)$  とおくことで、eq. (9.15) と eq. (9.3) は同じであることに気づくだろうか。実は、フーリエ変換は Fig. 9.4 のように、 $x(t)$  と周波数  $f$  の周期関数  $\exp(-j2\pi ft)$  の相関を取っているにすぎない。様々な周波数  $f$  の信号と、 $x(t)$  の相関値をとり続けることで、 $x(t)$  がどの周波数の信号と相関が大きいのか (= どの周波数成分を有しているか) を求めている。

フーリエ変換は、ある周波数をもった関数との相関値を表す関数を作り出している。

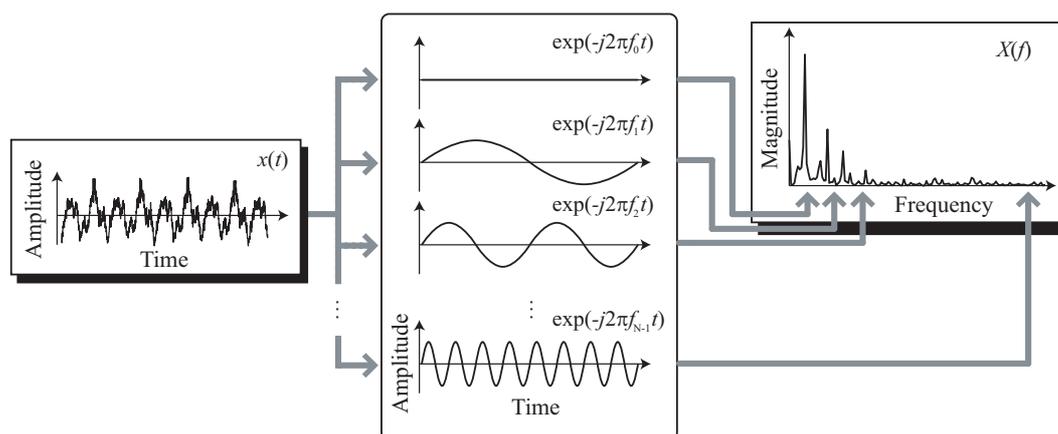


Fig. 9.4: 信号  $x(t)$  のフーリエ変換

一方、逆フーリエ変換はどのようにして周波数領域の信号を時間領域の信号に変換しているのだろうか。これは、フーリエ変換の名前の元になっているフランスの数学者フーリエ (Fourier) が学会に発表した定理に答が隠されている。

**フーリエの定理:** あらゆる周期関数は、その整数倍の周期を有する正弦波と余弦波の重ね合わせにより表すことができる。

実は「あらゆる周期関数」というのは間違いで、正確には「ディリクレの条件を満たすあらゆる周期関数」の場合、上の定理は成立する。ディリクレ (Dirichlet) の条件とは、

1. 有界な 1 値関数である
2. 不連続点の数は有限個である
3. 極大・極小の数は有限個である

というものだが、工学的に扱う関数の殆どがこの条件を満たすので以降は気にしないことにする。

周期関数  $x(t)$  はその整数倍の周期を有する正弦波と余弦波の重ね合わせにより表すことができる。ということは、逆に正弦波と余弦波の振幅が分かっているならば、それらの和を取ることで、周期関数  $x(t)$  を復元できることが分かる。これが逆フーリエ変換である。

フーリエ変換と逆フーリエ変換は、フーリエ級数展開によって数学的に理解することができる。以下にフーリエ級数展開についてまとめておくので参照されたい。

### 9.2.2 級数展開によるフーリエ変換（その1）：フーリエ級数展開 I

フーリエ変換の基本フーリエ級数展開，さらにはその基礎であるべき級数展開から確認する．

べき級数展開の「べき」は漢字で書くと「冪」であり，ある一つの数同士を繰り返し掛け合わせるという操作のことをいう．べき級数展開とはある関数  $f(t)$  を以下のようなべき級数の多項式に展開することである．

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5 + \dots + a_n t^n + \dots \quad (9.17)$$

さて，関数  $f(t)$  をべき級数展開するためには係数，eq. (9.17) における  $a_n$  を決定する必要がある．まず， $a_0$  を決定してみる．これは簡単で， $t = 0$  を代入すればよい．そうすると  $f(0) = a_0$  となり  $a_0$  を決定することができる．

次に  $a_1$  を決定する．このために eq. (9.17) の両辺を微分する．

$$f'(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + 4a_4 t^3 + 5a_5 t^4 + \dots + n a_n t^{n-1} + \dots \quad (9.18)$$

こうして， $f'(0) = a_1$  が得られ， $a_1$  を決定できる．同様に

$$f''(t) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3 t + 4 \cdot 3a_4 t^2 + 5 \cdot 4a_5 t^3 + \dots + n(n-1)a_n t^{n-2} + \dots \quad (9.19)$$

$$f'''(t) = 3 \cdot 2a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2a_4 t + \dots + n(n-1)(n-2)a_n t^{n-3} + \dots \quad (9.20)$$

より， $a_2$  及び  $a_3$  を求めることができる．以上より，級数の係数は

$$a_n = \frac{1}{n!} f^n(0), \quad (9.21)$$

で決定することができ，関数  $f(t)$  のべき級数展開式は以下の式で与えられる．

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^n(0) x^n. \quad (9.22)$$

つぎに，フーリエ級数展開に移る．基本はべき級数展開と同じである．係数決定の際に，いらないものをゼロにすればよい．

フーリエ級数展開は関数  $f(t)$  を以下のような無限級数で展開する．

$$\begin{aligned} f(t) = & a_0 \cos \frac{2\pi \cdot 0}{T_0} t + a_1 \cos \frac{2\pi \cdot 1}{T_0} t + a_2 \cos \frac{2\pi \cdot 2}{T_0} t + \dots + a_n \cos \frac{2\pi \cdot n}{T_0} t + \dots \\ & + b_0 \sin \frac{2\pi \cdot 0}{T_0} t + b_1 \sin \frac{2\pi \cdot 1}{T_0} t + b_2 \sin \frac{2\pi \cdot 2}{T_0} t + \dots + b_n \sin \frac{2\pi \cdot n}{T_0} t + \dots \end{aligned} \quad (9.23)$$

見ていただいで分かるとおり，関数を  $\sin$  と  $\cos$  のそれぞれの周波数の成分で表すことになる． $\cos 0 = 1$ ， $\sin 0 = 0$  であることを利用して整理をすると

$$\begin{aligned} f(t) = & a_0 + a_1 \cos \frac{2\pi \cdot 1}{T_0} t + a_2 \cos \frac{2\pi \cdot 2}{T_0} t + a_3 \cos \frac{2\pi \cdot 3}{T_0} t + \dots + a_n \cos \frac{2\pi \cdot n}{T_0} t + \dots \\ & + b_1 \sin \frac{2\pi \cdot 1}{T_0} t + b_2 \sin \frac{2\pi \cdot 2}{T_0} t + b_3 \sin \frac{2\pi \cdot 3}{T_0} t + \dots + b_n \sin \frac{2\pi \cdot n}{T_0} t + \dots, \end{aligned} \quad (9.24)$$

となる. この  $a_n, b_n$  (フーリエ級数と言う) を決定する必要があるのだが, べき級数と違ってゼロを入れればよいというわけではない. 以下に示す三角関数の性質を利用する.

$$\begin{aligned}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \cos \frac{2\pi \cdot n}{T_0} t dt &= 0, \\ \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \sin \frac{2\pi \cdot n}{T_0} t dt &= 0.\end{aligned}\tag{9.25}$$

Eq. (9.25) を用いて, eq. (9.24) を  $-T_0/2$  から  $T_0/2$  まで積分してみる.

$$\begin{aligned}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) dt &= a_0 \int_{-T_0/2}^{T_0/2} dt, \\ &= a_0 T_0.\end{aligned}\tag{9.26}$$

となり,  $a_0$  をのぞいてすべて消える. 以上より

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) dt,\tag{9.27}$$

とひとまず  $a_0$  を決定することができた. このように積分を使って係数を決定していく. まず, 以下の積分を考える.

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \sin \frac{2\pi \cdot m}{T_0} t \cos \frac{2\pi \cdot n}{T_0} t dt = 0.\tag{9.28}$$

これは, 積和の公式から導かれる.

次に, 以下の積分を考える.

$$\begin{aligned}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \sin \frac{2\pi \cdot m}{T_0} t \sin \frac{2\pi \cdot n}{T_0} t dt, \\ \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \cos \frac{2\pi \cdot m}{T_0} t \cos \frac{2\pi \cdot n}{T_0} t dt.\end{aligned}\tag{9.29}$$

これらの積分は二通りの場合に分けられる.

- $m = n$

$$\begin{aligned}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \sin \frac{2\pi \cdot m}{T_0} t \sin \frac{2\pi \cdot n}{T_0} t dt &= 2T_0, \\ \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \cos \frac{2\pi \cdot m}{T_0} t \cos \frac{2\pi \cdot n}{T_0} t dt &= 2T_0.\end{aligned}\tag{9.30}$$

- $m \neq n$

$$\begin{aligned}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \sin \frac{2\pi \cdot m}{T_0} t \sin \frac{2\pi \cdot n}{T_0} t dt &= 0, \\ \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \cos \frac{2\pi \cdot m}{T_0} t \cos \frac{2\pi \cdot n}{T_0} t dt &= 0.\end{aligned}\tag{9.31}$$

これらは各自確認していただきたい。これで、特定の項を以外をゼロにする準備ができた。早速バリバリ積分していく。

$$\begin{aligned}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) \cos \frac{2\pi \cdot n}{T_0} t dt &= 2T_0 a_n, \\ \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) \sin \frac{2\pi \cdot n}{T_0} t dt &= 2T_0 b_n.\end{aligned}\quad (9.32)$$

以上より

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cos \left( \frac{2\pi n}{T_0} t \right) dt, \quad (9.33)$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \sin \left( \frac{2\pi n}{T_0} t \right) dt. \quad (9.34)$$

が得られ、 $a_n$  および  $b_n$  を決定することができた。

今回、積分範囲を  $-T_0/2$  から  $T_0/2$  までとしたが、別に 0 から  $T_0$  とかでもかまわない。

### 9.2.3 級数展開によるフーリエ変換（その2）：フーリエ級数展開 II

フーリエの定理によれば、周期関数  $x(t)$  は

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{2\pi n}{T_0} t + b_n \sin \frac{2\pi n}{T_0} t \right), \quad (9.35)$$

で表すことができる。ただし、 $x(t)$  の基本周期を  $T_0$  とした。

Eq. (9.35) は、変数変換の工夫により、より簡単な形で表記することができる。 $a_n = c_n + c_{-n}$ ,  $b_n = j(c_n - c_{-n})$  とおくと、eq. (9.35) は

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left( \cos \frac{2\pi n}{T_0} t + j \sin \frac{2\pi n}{T_0} t \right) + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \left( \cos \frac{2\pi n}{T_0} t - j \sin \frac{2\pi n}{T_0} t \right), \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( c_n \exp \left( j \frac{2\pi n}{T_0} t \right) + c_{-n} \exp \left( -j \frac{2\pi n}{T_0} t \right) \right), \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp \left( j \frac{2\pi n}{T_0} t \right),\end{aligned}\quad (9.36)$$

と式変形できる。ただし、 $c_0 = \frac{a_0}{2}$ 。

ここで、eq. (9.36) の両辺に  $\exp \left( -j \frac{2\pi m}{T_0} t \right)$  をかけると、

$$x(t) \exp \left( -j \frac{2\pi m}{T_0} t \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp \left( j \frac{2\pi n}{T_0} t \right) \exp \left( -j \frac{2\pi m}{T_0} t \right), \quad (9.37)$$

$$\frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \exp \left( -\frac{2\pi j m t}{T_0} \right) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} c_n \exp \left\{ j \frac{2\pi(n-m)}{T_0} t \right\} dt, \quad (9.38)$$

$$= c_n \quad (n = m). \quad (9.39)$$

ただし、第2式から第3式への変形は、直交関係の式として

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \exp\left\{j\frac{2\pi(n-m)t}{T_0}\right\} dt = \begin{cases} 1 & (n=m) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases}. \quad (9.40)$$

を用いている。つまり、

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \exp\left(-j\frac{2\pi n}{T_0}t\right) dt, \quad (9.41)$$

が成立し、 $a_n$ ,  $b_n$  は

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cos\left(\frac{2\pi n}{T_0}t\right) dt, \quad (9.42)$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \sin\left(\frac{2\pi n}{T_0}t\right) dt. \quad (9.43)$$

と表すことができる。

ここで、 $c_n$  は複素フーリエ係数 (スペクトル) という。Eq. (9.41) より、 $x(t)$  により  $c_n$  が一義的に決定されることが、逆に  $c_n$  をもちいて  $x(t)$  を表現できることが分かる。

ただし、 $x(t)$  は周期関数であるという仮定の基に成立していることに注意されたい。

#### 9.2.4 級数展開によるフーリエ変換 (その3): フーリエ変換への拡張

前小節で定義した、フーリエ級数展開の式を再掲する。

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \exp\left(-j\frac{2\pi n}{T_0}t\right) dt, \quad (9.41')$$

ここで、複素フーリエ係数  $c_n$  と周期  $T_0$  の積を  $X(n/T_0)$  とおく。すなわち、

$$X\left(\frac{n}{T_0}\right) = c_n T_0. \quad (9.44)$$

Eq. (9.44) を用いて、eq. (9.41) を書き換えると、

$$\begin{aligned} X\left(\frac{n}{T_0}\right) &= c_n T_0, \\ &= \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \exp\left(-j\frac{2\pi n}{T_0}t\right) dt. \end{aligned} \quad (9.45)$$

さて、 $T_0$  は  $x(t)$  の基本周期であった。今までは周期  $n/T_0$  は離散値であったが、これを連続値に拡張する。  $n = -\infty, \dots, -1, 0, 1, \dots, \infty$  のもとで、 $T_0 \rightarrow \infty$  の極限をとり、離散値の刻み幅を無限小としよう。この時、 $n/T_0 \rightarrow 1/T$  となるので、eq. (9.45) は

$$X\left(\frac{1}{T}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp\left(-j\frac{2\pi}{T}t\right) dt. \quad (9.46)$$

$1/T = f$  を用いて書き換えると,

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt. \quad (9.47)$$

この eq. (9.47) がフーリエ変換式である.

一方, 逆フーリエ変換式は, eq. (9.36) より導くことができる.

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(j\frac{2\pi n}{T_0}t\right), \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{X\left(\frac{n}{T_0}\right)}{T_0} \exp\left(j\frac{2\pi n}{T_0}t\right), \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(nf_0) \exp(j2\pi fnt) f_0, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \exp(j2\pi ft) df. \end{aligned} \quad (9.48)$$

ただし, 第1式から第2式への変形は eq. (9.44) を, 第2式から第3式への変形は  $T_0 = 1/f_0$  を, 第3式から第4式への変形は  $f_0 \rightarrow 0 \Rightarrow f_0 \rightarrow df$ ,  $nf_0 \rightarrow f$ ,  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}$  をそれぞれ利用している.

### 9.3 離散フーリエ変換

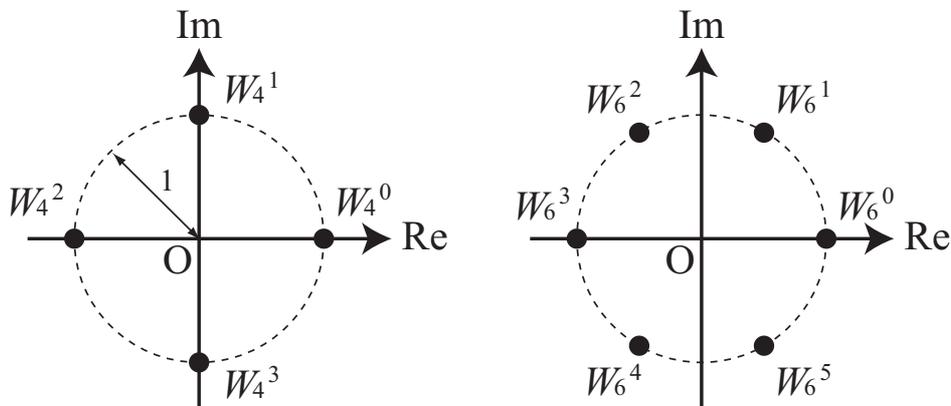
今までのフーリエ変換は, 連続時間信号をその対象としている. しかし, 実際に扱うデータはデジタル信号のような離散時間信号が多い. この離散時間信号に対してフーリエ変換を行う手段を, 離散フーリエ変換という.

例えば, 長さ  $N$  の離散時間信号  $h = (h_0, h_1, \dots, h_{N-1})$  を離散フーリエ変換することを考える. この時, 離散フーリエ変換は, 以下の行列演算によって表すことができる.

$$H = hF_N. \quad (9.50)$$

ここで,  $H$  は  $h$  を離散フーリエ変換した長さ  $N$  の複素ベクトル  $H = (H_0, H_1, \dots, H_{N-1})$  である. また,  $F_N$  は  $N \times N$  の離散フーリエ変換行列で, 以下の式で定義される.

$$\begin{aligned} F_N &= \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} W_N^0 & W_N^0 & \cdots & W_N^0 \\ W_N^0 & W_N^1 & \cdots & W_N^{N-1} \\ W_N^0 & W_N^2 & \cdots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_N^0 & W_N^{(N-1)} & \cdots & W_N^{(N-1)^2} \end{pmatrix}, \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} \mathbf{f}_0 & \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \cdots & \mathbf{f}_{N-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Fig. 9.5:  $N = 4, 6$  の時の回転子がとる値

ただし,  $W_N^k = \exp \frac{2\pi j k}{N}$ . この  $W$  は回転子という. これは,  $W$  は絶対値が1で, あたかも単位円上を回転しているように振る舞うことに由来する.  $N = 4$  の時,  $W$  は  $1, j, -1, -j$  のいずれかになる.  $N = 6$  の時,  $W$  は  $1, \frac{1+\sqrt{3}j}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}j}{2}, -1, \frac{-1-\sqrt{3}j}{2}, \frac{1-\sqrt{3}j}{2}$  のいずれかになる (Fig. 9.5 参照).

つまり, 離散フーリエ変換は信号  $h$  と回転子を成分に持つ列ベクトル  $\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{N-1}$  の相関値をとっていることに相当する. 勘のいい人は,  $\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{N-1}$  が様々な周波数の信号であることに気づくと思う.

実際に,  $N = 6$  の信号  $h = (0, 2, 0, -1, 0, 1)$  を離散フーリエ変換してみよう.

この時,  $\mathbf{f}_0 \sim \mathbf{f}_5$  はそれぞれ以下ようになる.

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_0 &= (W_6^0, W_6^0, W_6^0, W_6^0, W_6^0, W_6^0), \\ \mathbf{f}_1 &= (W_6^0, W_6^1, W_6^2, W_6^3, W_6^4, W_6^5), \\ \mathbf{f}_2 &= (W_6^0, W_6^2, W_6^4, W_6^0, W_6^2, W_6^4), \\ \mathbf{f}_3 &= (W_6^0, W_6^3, W_6^0, W_6^3, W_6^0, W_6^3), \\ \mathbf{f}_4 &= (W_6^0, W_6^4, W_6^2, W_6^0, W_6^4, W_6^2), \\ \mathbf{f}_5 &= (W_6^0, W_6^5, W_6^4, W_6^3, W_6^2, W_6^1), \end{aligned}$$

となる.  $\mathbf{f}_0 \sim \mathbf{f}_5$  をそれぞれ Fig. 9.6 に表す.

Fig. 9.6 より,  $\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4, \mathbf{f}_5$  はそれぞれ単位円を  $N$  分割した点をそれぞれ速さ  $0, 1, 2, 3, 4, 5$  で回転している点を成分に持つベクトルであることが分かる. ここで着目してほしいのが,  $\mathbf{f}_1$  と  $\mathbf{f}_5$ ,  $\mathbf{f}_2$  と  $\mathbf{f}_4$  はそれぞれ同じ複素数を持っている点である.

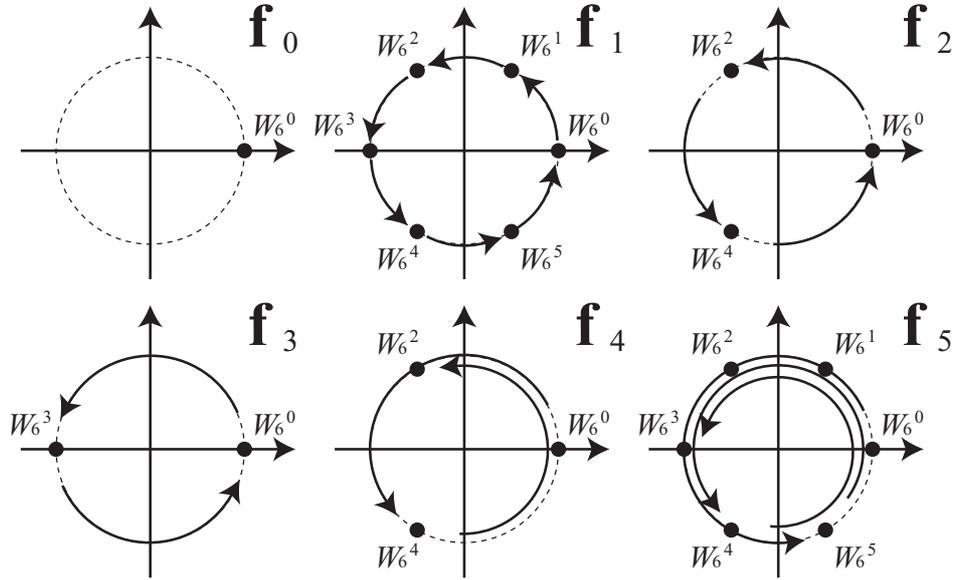


Fig. 9.6:  $N = 6$  の時の  $\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4, \mathbf{f}_5$

さて、 $\mathbf{f}_0 \sim \mathbf{f}_5$  が求まったので、行列演算  $hF_6$  を行う。

$$\begin{aligned}
 H &= hF_6, \\
 &= (0, 2, 0, -1, 0, 1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1+\sqrt{3}j}{2} & \frac{-1+\sqrt{3}j}{2} & -1 & \frac{-1-\sqrt{3}j}{2} & \frac{1-\sqrt{3}j}{2} \\ 1 & \frac{-1+\sqrt{3}j}{2} & \frac{1-\sqrt{3}j}{2} & 1 & \frac{-1+\sqrt{3}j}{2} & \frac{1-\sqrt{3}j}{2} \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & \frac{-1-\sqrt{3}j}{2} & \frac{-1+\sqrt{3}j}{2} & 1 & \frac{-1-\sqrt{3}j}{2} & \frac{-1+\sqrt{3}j}{2} \\ 1 & \frac{1-\sqrt{3}j}{2} & \frac{-1-\sqrt{3}j}{2} & -1 & \frac{-1+\sqrt{3}j}{2} & \frac{1+\sqrt{3}j}{2} \end{pmatrix}, \quad (9.51) \\
 &= \left( 2, \frac{5+\sqrt{3}j}{2}, \frac{-5+\sqrt{3}j}{2}, -2, \frac{-5-\sqrt{3}j}{2}, \frac{5-\sqrt{3}j}{2} \right). \quad (9.52)
 \end{aligned}$$

この  $H$  は、第1～第3成分と第4～第6成分の絶対値が共に等しく、符号が逆である。これは、 $\mathbf{f}_1$  と  $\mathbf{f}_5$ 、 $\mathbf{f}_2$  と  $\mathbf{f}_4$  はそれぞれ同じ複素数を持っているという先ほど着目した性質による。例えば、 $\mathbf{f}_5$  は速さ5で回転している一方で、速さ-1で回転しているとも見なせる。つまり、周波数が等しく、符号のみ異なる波形とみなせてしまう。これは、第8.4.2小節で説明したサンプリング定理と一緒に考えるとわかりやすい。信号  $h$  のサンプリング周波数を  $f$  とする。この時、離散フーリエ変換行列によって表現される周波数は、区間  $[-f/2, f/2]$  となる。そして、この周波数を  $N$  等分し、それぞれの周波数の信号との相関をとっていることになる。これらの関係を、Fig. 9.7 で確認しよう。

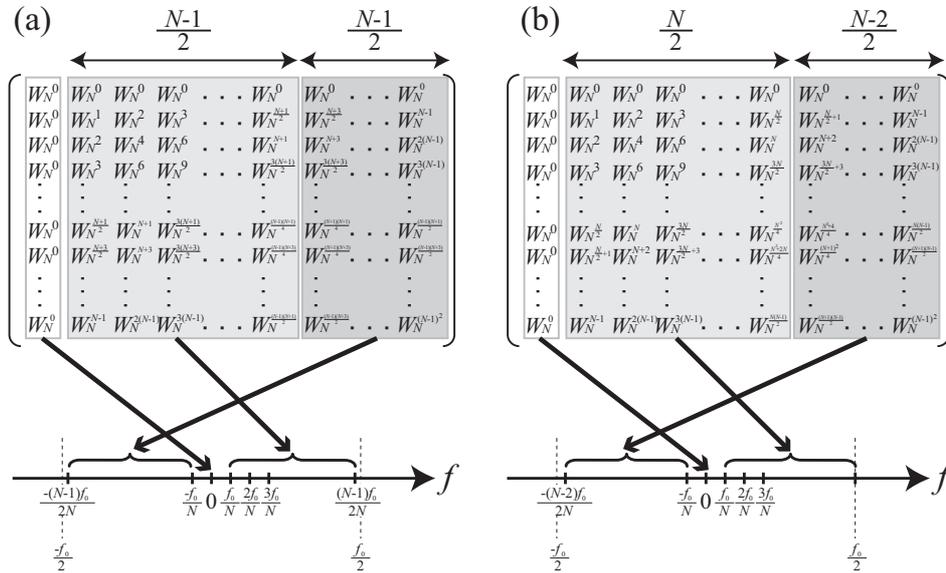


Fig. 9.7: 離散フーリエ変換行列と周波数の関係  
 (a)  $N$  が奇数の場合, (b)  $N$  が偶数の場合

離散フーリエ変換についてまとめると、以下のようなになる。

- サンプル周波数  $f$  で信号を測定する。
- 離散フーリエ変換によって解析できる周波数帯域は最大で  $\left[0, \frac{f}{2}\right]$ 。
- この区間内を信号長  $N$  で離散化するので、測定時間が長いほど分解能が高い。
- 信号は周期信号と見なされる（長さ  $N$  の信号が周期的に繋がっていると仮定する）

ちなみに、逆離散フーリエ変換はどのように定義されるのだろうか。Eq. (9.50) をもう一度見直してみよう。

$$H = hF_N. \tag{9.50'}$$

ここから、

$$\begin{aligned} HF_N^{-1} &= hF_N F_N^{-1}, \\ h &= HF_N^{-1}, \end{aligned} \tag{9.53}$$

により簡単に逆離散フーリエ変換が導かれた。ちなみに、離散フーリエ変換行列  $F_N$  はユニタリ行列である。ユニタリ行列は、逆行列が自身の複素共役に等しいという性質がある。すなわち、 $F_N^{-1} = \overline{F_N}$  が成り立つので、逆離散フーリエ変換は最終的に eq. (9.54) で表すことができる。

$$h = H\overline{F_N}. \tag{9.54}$$

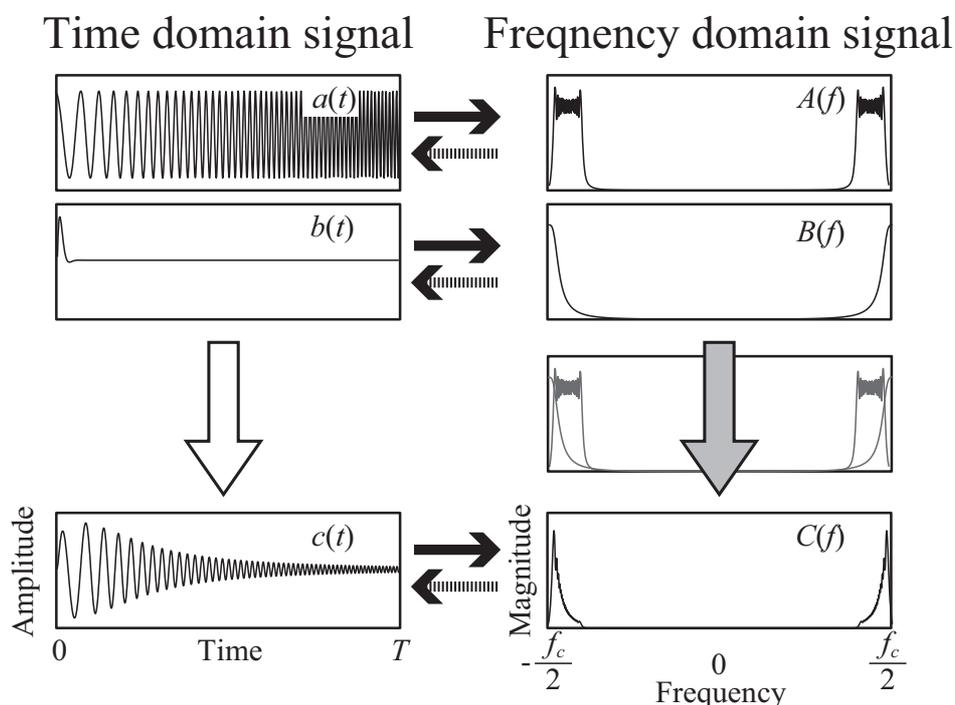


Fig. 9.8: 畳み込みのイメージ

左側：時間領域で考えた場合 右側：周波数領域で考えた場合

## 9.4 畳み込み

### 9.4.1 畳み込みの概要

よくオーディオマニア<sup>2</sup>の間では「○○のスピーカは音がよい」、「××の音は低音が響かない」といった論議が真剣に交わされる。では、同じ音楽を再生しているはずなのに、再生機器によって聞こえてくる音が異なるのがなぜなのだろうか。これは、再生機器の特性が、音楽信号に影響を与えていることに起因する。このような現象は「畳み込み」によって説明することができる。

ここでは、ある再生周波数帯域を持つスピーカに信号を入力し、その応答波形を見てみよう。まず、天下りの的であるがいくつかの単語をここで定義する。

インパルス応答	システムにインパルス信号 <sup>3</sup> を入力したときの出力
チャープ信号	低周波から高周波に連続的に変化する信号

まずスピーカの特性として、Fig. 9.8の $b(t)$ のようなインパルス応答が得られたと仮定する。このスピーカに入力する信号がチャープ信号 $a(t)$ 、出力された信号を $c(t)$ とする。

<sup>2</sup>もはや宗教に、近い

ここで、 $c(t)$  は  $b(t)$  を  $a(t)$  に対して平行移動させながら重ね合わせていった波形と等しい。これを式で表すと、

$$c(t) = (a * b)(t) = \int a(\tau)b(t - \tau)d\tau. \quad (9.55)$$

すなわち、あるシステムに信号  $a(t)$  を印加したとき、得られる出力  $c(t)$  はシステムのインパルス応答  $b(t)$  の畳み込みの形で表現される。更に、システムが線形時不変システムの場合、インパルス応答さえ分かればどんな入力に対する応答も畳み込みにより求められる。ただし、線形時不変システムとは、入力を  $x_1(t), x_2(t)$ 、出力を  $y_1(t), y_2(t)$  としたときに、以下の関係が成り立つシステムのことをいう。

$$\begin{aligned} x_1(t) \rightarrow y_1(t), x_2(t) \rightarrow y_2(t) &\Rightarrow ax_1(t) + bx_2(t) \rightarrow ay_1(t) + ay_2(t), \\ x_1(t) \rightarrow y_1(t) &\Rightarrow x_1(t - \tau) \rightarrow y_1(t - \tau). \end{aligned} \quad (9.56)$$

ただし、 $a, b, \tau$  はそれぞれ任意の定数。

この畳み込みは連続的な積分計算を伴うため、プログラミングで実現しようとするるとループ計算を繰り返すことになり、計算コストが大きいという問題がある。ところが、時間領域でなく周波数領域で畳み込みを考えると、単なる積で表すことができる。つまり、時間領域と周波数領域に信号を変換すれば、時間領域信号を周波数領域信号に変換し、周波数領域で畳み込みを行い、再び時間領域に戻せば複雑な演算をすることなく同じ解を得ることができる。具体的には、以下の等式が成立する。

$$c(t) = \int a(\tau)b(t - \tau)d\tau, \quad (9.57)$$

$$C(f) = A(f)B(f). \quad (9.58)$$

Fig. 9.8 の右側に  $a(t)$  をフーリエ変換した  $A(f)$ 、 $b(t)$  をフーリエ変換した  $B(f)$ 、 $c(t)$  をフーリエ変換した  $C(f)$  を示す。この時、 $C(f)$  は  $A(f)$  と  $B(f)$  の要素をそれぞれかけあわせたものに等しい。すなわち、信号を「ずらす」という行為が必要ない。フーリエ変換が信号処理の基本的道具として良く利用されるのは、この性質があるからである。フーリエ変換がどのようなものであるかさえ理解してしまえば、信号処理で最も良く出会う畳み込みはフーリエ変換のかけ算を考えるだけで、およその見当をつけることができる。

#### 9.4.2 畳み込みの数学的な導出

時間領域信号の畳み込みは、周波数領域信号の積に等しいということは前章で説明した。ここでは、フーリエ変換の式を用いてそれを証明していく。

時間領域信号  $a(t)$ 、 $b(t)$  と、それらをフーリエ変換した  $A(f)$ 、 $B(f)$  を考える。このとき、

$$\begin{aligned} A(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} a(t_1) \exp(-j2\pi ft_1) dt_1, \\ B(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} b(t_2) \exp(-j2\pi ft_2) dt_2. \end{aligned}$$

ここで、この  $A(f)$  と  $B(f)$  の積を計算してみよう。すると、

$$A(f)B(f) = \int_{-\infty}^{\infty} a(t_1) \exp(-j2\pi f t_1) dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} b(t_2) \exp(-j2\pi f t_2) dt_2, \quad (9.59)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a(t_1)b(t_2) \exp(-j2\pi f (t_1 + t_2)) dt_1 dt_2. \quad (9.60)$$

ここで、 $t_1 + t_2 = \tau$  とおくと、 $t_2 = \tau - t_1$ 、 $dt_1 dt_2 \rightarrow dt_1 d\tau$  より、

$$\begin{aligned} A(f)B(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a(t_1)b(\tau - t_1) \exp(-j2\pi f (t_1 + \tau - t_1)) dt_1 d\tau, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a(t_1)b(\tau - t_1) \exp(-j2\pi f \tau) dt_1 d\tau, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} a(t_1)b(\tau - t_1) dt_1 \right] \exp(-j2\pi f \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (9.61)$$

ここで、上式は  $\left[ \int_{-\infty}^{\infty} a(t_1)b(\tau - t_1) dt_1 \right]$  という関数をフーリエ変換していることに相当する。そして、 $\left[ \int_{-\infty}^{\infty} a(t_1)b(\tau - t_1) dt_1 \right]$ こそ2つの信号  $a(t_1)$  と  $b(t_1)$  の時間領域における畳み込みの形に他ならない。

## 10 研究への展開

いままで学習してきた信号処理は、そのまま研究に用いることが多い。ここでは、実際にこれらの信号処理を用いている例を挙げてみる。

### 10.1 信号処理の例

#### 10.1.1 相関関数

相関関数は、信号の類似度を表す指標である。この相関関数は、信号伝搬時間の測定などによく用いられる。Fig. 10.1 のようにスピーカとマイクとの距離  $L$  を測定することを考える。

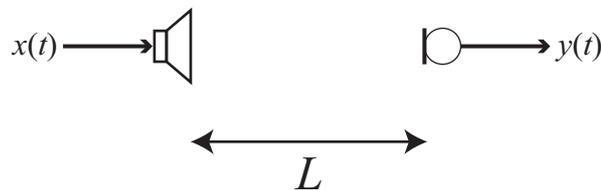


Fig. 10.1: 信号伝搬時間の測定系

ある信号  $x(t)$  を送信器から送信し、受信器で受波した信号  $y(t)$  との相関を取ることで、機械的に信号伝搬時間を求めることができる。ある時刻  $t_0$  で信号  $x$  を送信する。信号は距離  $L$  を伝搬し、音速を  $c$  とすると  $\frac{L}{c}$  秒後に受信器に到達する。受波された波形を  $y(t)$  とする。ここで、 $x(t)$  と  $y(t)$  の相互相関関数を  $z(t)$  とする。 $x$  と  $y$  の信号長と  $z(t)$  のピーク継続時間のうち、後者の方が短い場合は相互相関関数を用いることで  $x$  と  $y$  の比較より正確な信号伝搬時間を求めることが可能になる。

信号  $x(t)$  としてチャープ波を選んだ場合の  $x(t)$ ,  $y(t)$ , および  $z(t)$  を Fig. 10.2 に示す。

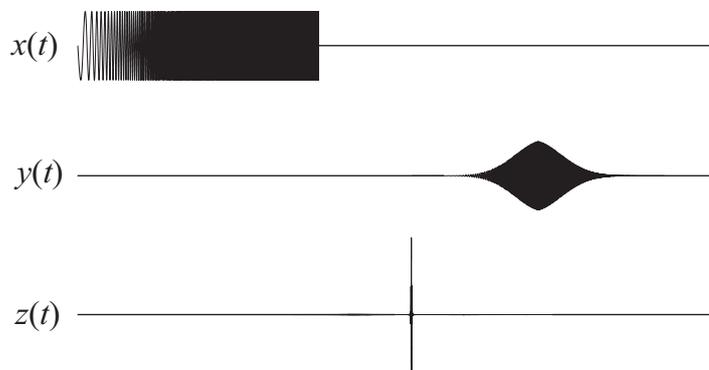


Fig. 10.2: 送信信号  $x(t)$ , 受信信号  $y(t)$ , および相互相関関数  $z(t)$

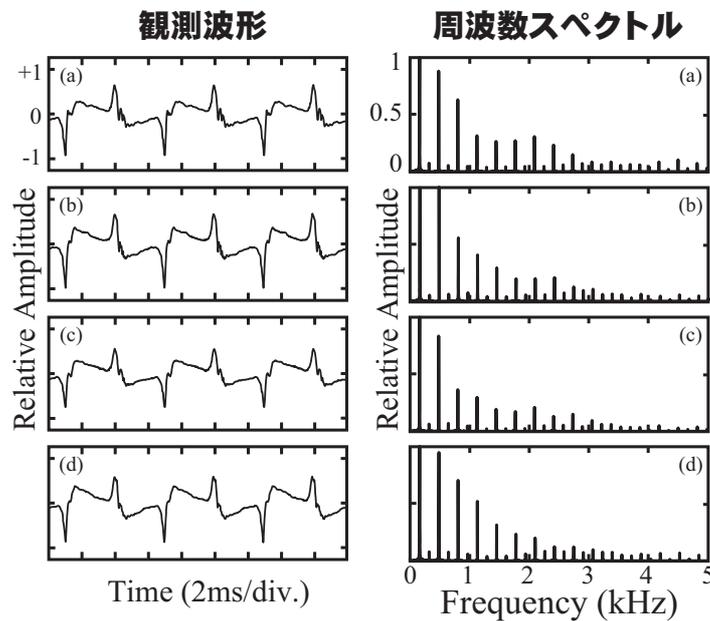


Fig. 10.3: ある楽器で測定された波形と、周波数スペクトル

相互相関関数  $z(t)$  は非常に短いピークを有していることが確認できる．このように，チャープ信号は非常に優れた相互相関特性を有しているために，計測信号として多用されている．ただし，送信器や受信器の特性によってはチャープ信号を用いることができない場合もある．例えば，非常に鋭い共振周波数を持つデバイスを送信器や受信器に用いる場合，チャープ信号を送っても，共振周波数付近の信号しか受信できない場合がある（これを帯域制限された，という）．

### 10.1.2 フーリエ変換

楽器はその種類によって非常に様々な音を奏でる．そして，楽器の性質はしばしば周波数空間上で議論される．これは，楽器はそれぞれが異なった音色を有すること，そして，その音色の多くは音を出した時に生じる倍音成分が影響して決定付けられることに起因する．

そこで，楽器の音を収録し，それをフーリエ変換することで周波数空間上で解析を行うことが多い．例えば，Fig. 10.3 はある楽器を (a)～(d) の条件下で演奏したときの波形と，その周波数スペクトルを表している．波形からその差異を見つけるのは難しいが，周波数に着目すると様々な相違点が見えてくることが分かるだろうか．

ここで，フーリエ変換を行う際に必ず気をつけないことがある．それは，フーリエ変換はあくまでも**周期関数をその対象としている**こと．適当な区間でフーリエ変換を行っても，それが正しい結果にならないことがあるので注意が必要である．例えば，区間を適当に設定した結果，それを周期的に並べると信号の不連続点が生じてしまう場合がある．そのため，高い周波数成分（高調波，という）が増加してしまうといった問題が発生しやすい．

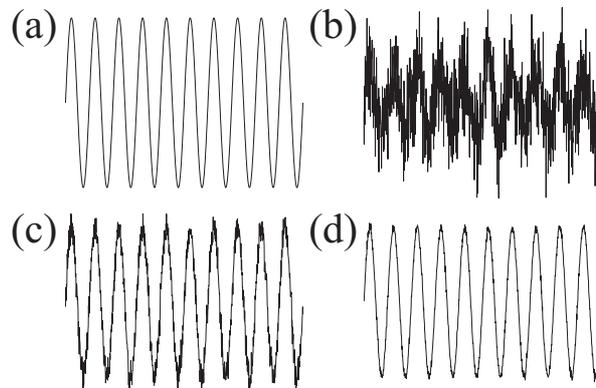


Fig. 10.4: (a) 原信号, (b) 雑音を加えた信号, (c) 加算平均 100 回後, (d) 加算平均 1000 回後

## 10.2 雑音

最後に、実験を行う上で必ず生じてくる雑音についてまとめた上で、信号処理入門を終わりにしたい。雑音とは、必要な信号に関係のない別の信号をいう。シミュレーションなどでは理想的な環境を仮定して雑音を考慮しない場合もあるが、現実世界で雑音を無視することのできる機会は殆ど無い。

この雑音は、大きく**外部雑音** (external noise) と**内部雑音** (Internal noise) に分けることができる。外部雑音は例えば外部の電磁界の揺らぎによるもの（商用電源電界によるものなど）や、騒音など多種存在する。内部雑音は、測定器自身の本来の雑音であり、その原因として熱雑音などが挙げられる。

多くの雑音は、ある確率密度関数に従うことが多い。例えば、熱雑音は白色ガウス雑音 (White Gaussian noise) として扱えることが知られている。ガウス雑音とは、

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (10.1)$$

を確率密度関数として持つ情報源であり、さらに白色であるということは確率変数  $X$  の平均値

$$\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx = \mu, \quad (10.2)$$

が零の場合を指す。

白色ガウス雑音は、平均が零であるという性質を有していることから、信号を繰り返し取得して平均化することで雑音の影響を低減することができる。

Fig. 10.4(a) に示される信号に白色ガウス雑音を加えると、Fig. 10.4(b) のような信号が得られる。雑音を加えた信号を 100 個加算平均したものが Fig. 10.4(c)、1000 個加算平均したものが Fig. 10.4(d) となっている。加算平均をすることで、雑音の影響が抑制されていることが分かる。信号を繰り返し取得することで、雑音の平均値が零に収束するからである。この性質を示す定理が、中心極限定理である。

## 11 課題

以下のページを印刷し、( ) 月 ( ) 日迄に海老原まで提出すること。

学年： \_\_\_\_\_ 氏名： \_\_\_\_\_

### 11.1 課題 1

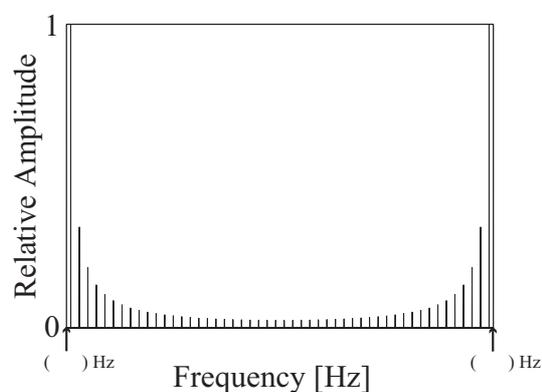
A/D, D/A 変換器である PC カード (6062E, National Instruments) はサンプリング周波数の上限が 500 kHz である。この時以下の間に答えよ。

(1) 6062E を用いて計測を行う場合、何 kHz 以上の信号を扱うことは適当でないか。

(2) サンプリング周波数 1 kHz である信号を 5 秒間 (0 秒から 5 秒まで) 信号を測定した。得られた離散時間信号ベクトルの長さを求めよ。

(3) (2) で得られた信号を離散フーリエ変換すると、以下のようなグラフが得られた。

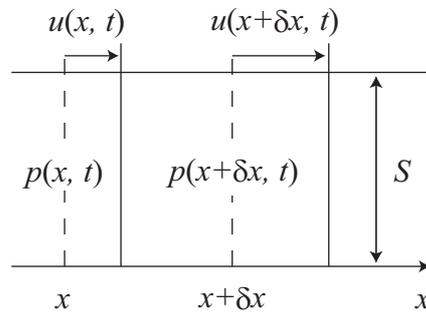
- A 矢印で示されている一点目と最後の点はそれぞれ Hz か。  
また何点目から何点目迄のデータが周波数解析に必要なものか。
- B このスペクトルの分解能は何 Hz か。



### 11.2 課題 2

ある信号  $a$  を送信器から送信し、受信器で受信された信号を  $b$  とする。雑音の大きな環境下で実験を行ったので、この測定を 100 回繰り返して行った。計測されたデータは、//File/ShareSpace/学生ゼミ/Ebihara に  $a.mat$  と  $b.mat$  という形で保存してある。これらの信号を MATLAB で解析し、送信機と受信器の間の距離  $L$  を求めよ。

なお、サンプリング周波数は 5 kHz、測定時間は 5 秒間で、信号は 1 秒間に 1470 m 進むものとする。

Fig. 12.1:  $x$  の正の方向に伝搬する平面波

## 第IV部

# 音響特性入門

音波は同じ波動性をもつ光や電波に比べて発生装置が安価であり，周波数が低く，透過率が高いので扱いやすい．しかし，光や電波では考慮されない問題も出てくる．音波の性質を知らずに実験を行うと，非効率な実験構成であるためにS/N比が悪くなっていたりする．このパートでは，実際に実験を行う際に留意すべき音響特性についてまとめる．

まず始めに参考文献を挙げる．より詳しく勉強したい場合には，以下の本を参考にすればよい．

- 城戸 健一，“基礎音響工学”，コロナ社．
- 海洋音響学会，“海洋音響の基礎と応用”，成山堂書店．
- 吉川 茂，藤田 肇，“基礎音響学—振動・波動・音波”，講談社（注：絶版）．

## 12 波動方程式

波動方程式は波のふるまいを与える微分方程式であり，光学や電磁気学など波動性をもつ様々な分野で基本式として用いられる．当然音響学においても波動方程式は基本式である．以降で波動方程式の導出をし，その一般解を求める．

### 12.1 波動方程式の導出

簡単のため一次元の波動方程式を考える．音波を伝える媒質は，音波によって  $x$  方向にしか動かないものとする．まず，音圧による媒質の変形を考える．いま，Fig. 12.1のように音波によって  $x = x$  の位置にある面積  $S$  の面と  $x = x + \delta x$  の位置にある面積  $S$  の面に囲まれる微小立方体が変形したとする． $x = x$  の面が音波のために  $u(x, t)$  だけ変位したとする．すなわち，位置が  $x = x$  から  $x = x + u(x, t)$  へと動いたとする．そして， $x = x + \delta x$  面は  $u(x + \delta x, t)$  だけ変位したとすると，媒質は音波によって  $S\delta x$  から  $S\{u(x + \delta x, t) - u(x, t)\}$  だけ膨張したこと

になる。この膨張は音圧によっておこるものであり、音圧  $p$  と媒質の膨張率の関係は体積弾性率  $K$  を用いて以下の式で表わされる。

$$\begin{aligned}\frac{p}{K} &= -\frac{S\{u(x+\delta x, t) - u(x, t)\}}{S\delta x}, \\ &= -\frac{\partial u}{\partial x}.\end{aligned}\quad (12.1)$$

さらに、両辺を時間で微分すると以下の式が得られる。

$$\frac{1}{K} \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial v}{\partial x}.\quad (12.2)$$

次に媒質の運動を考える。媒質が  $u(x, t)$  という変位をするのは、 $x = x$  における面と  $x = x + \delta x$  における面にかかる圧力が異なるからである。 $x = x$  面には  $p(x, t)$  という圧力がかかり、 $x = x + \delta x$  面には  $p(x + \delta x, t)$  という圧力がかかるとすると媒質には以下に示す力  $F$  がかかる。

$$F = S\{p(x, t) - p(x + \delta x, t)\}.\quad (12.3)$$

この力によって、媒質は運動する。媒質の密度を  $\rho$  とすると、質量は  $\rho S\delta x$  となる。加速度は  $\partial v / \partial t$  であるので、

$$\begin{aligned}\rho S\delta x \frac{\partial v}{\partial t} &= S\{p(x, t) - p(x + \delta x, t)\}, \\ \rho \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{p(x, t) - p(x + \delta x, t)}{\delta x}, \\ \rho \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial x},\end{aligned}\quad (12.4)$$

という運動方程式が得られる。

eqs. (12.2), (12.4) より以下の連立方程式が得られた。

$$\begin{cases} -\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{K} \frac{\partial p}{\partial t}, \\ -\frac{\partial p}{\partial x} = \rho \frac{\partial v}{\partial t}. \end{cases}\quad (12.5)$$

この連立方程式の上式を  $t$  で微分し、下式を  $x$  で微分し整理すると次の微分方程式が得られる。

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}.\quad (12.6)$$

ここで  $c$  は音速であり、 $K$  及び  $\rho$  とは以下の関係がある。

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}}.\quad (12.7)$$

この微分方程式は、音圧に関する波動方程式と呼ばれる。

同様に、粒子速度  $v$  に関する波動方程式も以下のように導くことができる。

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}.\quad (12.8)$$

音波伝搬の解析には、音圧と粒子速度の両方を扱う必要がある。この二つの微分方程式の両方を扱うのは面倒であるので、速度ポテンシャル  $\phi$  を導入する。この速度ポテンシャルは、

$$v = -\frac{\partial\phi}{\partial x}, \quad (12.9)$$

で定義する。音圧  $p$  は  $p=0$  の時に  $\phi=0$  になるものとして、eq. (12.9) を eq. (12.4) に代入し  $x$  で積分をすると

$$p = \rho \frac{\partial\phi}{\partial t}, \quad (12.10)$$

が得られる。この速度ポテンシャルは便宜上定義したもので、物理的な意味は考えない。速度ポテンシャルによる波動方程式は、

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}, \quad (12.11)$$

で与えられる。この速度ポテンシャルによる波動方程式を解析し、そこから音圧、粒子速度を得るのが一般的な方法である。

## 12.2 波動方程式の解

それでは次に波動方程式の解について考える。微分方程式では実際にどのような振る舞いをするのか分からないので解を求めたい。しかしながら、見て分かるように波動方程式は複雑な微分方程式となっているので、その解を求めるのは容易ではない。実際には、差分法等を用いて数値解析的に求めるのが一般的であるが、ここでは一般解であるダランベールの解を求める。具体的な関数は分からないが、大まかにどのような関数になるかを知ることができる。

先ほど示した、速度ポテンシャル  $\phi(x, t)$  に関する波動方程式、

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}, \quad (12.12)$$

において以下のような変数変換をする。

$$\begin{cases} \xi = t - x/c, \\ \eta = t + x/c. \end{cases} \quad (12.13)$$

すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial x} &= \frac{\partial\phi}{\partial\xi} \frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial\eta} \frac{\partial\eta}{\partial x}, \\ &= -\frac{1}{c} \frac{\partial\phi}{\partial\xi} + \frac{1}{c} \frac{\partial\phi}{\partial\eta}, \end{aligned} \quad (12.14)$$

となり、もう一度  $x$  で微分をすると

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2} - 2 \frac{\partial^2\phi}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{\partial^2\phi}{\partial\eta^2} \right), \quad (12.15)$$

が得られる。同様にして,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \frac{\partial \phi}{\partial \eta}, \quad (12.16)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2}, \quad (12.17)$$

が得られる。

ここで, eq. (12.12) に eqs. (12.15), (12.17) を代入すると

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \eta} = 0, \quad (12.18)$$

という式が導かれる。この式を用いて, 一般解を求めていく。

まず, eq. (12.18) を  $\eta$  で積分をする。

$$\int \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \eta} d\eta = \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \alpha = 0, \quad (12.19)$$

積分定数  $\alpha$  は,  $\partial \alpha / \partial \eta = 0$  であるので,  $\alpha$  は  $\xi$  の関数  $\alpha(\xi)$  となる。次に,  $\xi$  で積分をする。

$$\phi = \int \alpha(\xi) d\xi + g(\eta), \quad (12.20)$$

ここでも積分定数  $g$  は  $\eta$  の関数となる。 $\alpha$  は,  $\xi$  の関数なので, 積分をしても  $\xi$  の関数となり,

$$\phi = f(\xi) + g(\eta), \quad (12.21)$$

$$= f(t - x/c) + g(t + x/c), \quad (12.22)$$

と, 任意関数  $f$  及び  $g$  を用いる波動方程式の一般解, ダランベールの解を得ることができた。ここで,  $f$  は  $x$  正の方向に進む進行波,  $g$  は  $x$  負の方向に進む後退波である。

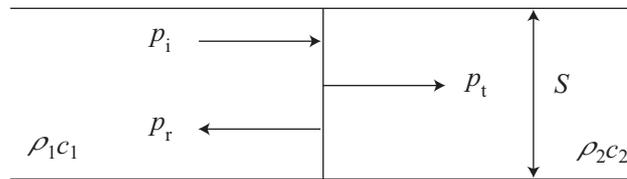


Fig. 13.1: 境界で反射と透過をする音波

### 13 音響インピーダンス

音波は媒質の境界において、反射をする。たとえば、空気中から音波を水中に放射すると、その大部分は反射をしてしまう。媒質による反射率を考えなければ、音波による実験ではS/N比が悪くなってしまう。この章では、音波の透過、反射をダランベールの解と音響インピーダンスという概念を用いて考える。

前章の速度ポテンシャル  $\phi$  の一般解から、音圧  $p$ 、粒子速度  $v$  を求める。

$$\begin{aligned}
 p &= \rho \frac{\partial \phi}{\partial t}, \\
 &= \rho \left( \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} \right), \\
 &= \rho \left( \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial g}{\partial \eta} \right). \tag{13.1}
 \end{aligned}$$

同様に、

$$v = \frac{1}{c} \left( \frac{\partial f}{\partial \xi} - \frac{\partial g}{\partial \eta} \right). \tag{13.2}$$

ここで、進行波  $f$  のみを考えると、

$$p/v = \rho c, \tag{13.3}$$

という関係式が得られ、 $p/v$  を音響インピーダンスと呼ぶ。

続いて Fig. 13.1 に示すように、断面積  $S$  の管中で媒質が急に変化し、音響インピーダンスが  $\rho_1 c_1$  から  $\rho_2 c_2$  に変化する場合を考える。極端に言えば、反射体がある場合である。ただし、反射体があっても一部は透過をする。音響インピーダンスにより、反射率がどのように決まるかを考える。入射波、反射波及び透過波の音圧を  $p_i$ 、 $p_r$  及び  $p_t$  とし、粒子速度を  $v_i$ 、 $v_r$  及び  $v_t$  とする。媒質の境界面において、音圧は連続でなければならないので、

$$p_i + p_r = p_t, \tag{13.4}$$

が成立し、境界面の両側において、流入量と流出量は等しいという連続の式より、

$$S(v_i + v_r) = S v_t, \tag{13.5}$$

Table II: 各媒質の音響インピーダンス

媒質	密度 (kg/m <sup>3</sup> )	音速 (m/s)	音響インピーダンス (N · s/m <sup>3</sup> )
空気	1.29	331	429
水	1.00 × 10 <sup>3</sup>	1.50 × 10 <sup>3</sup>	1.50 × 10 <sup>6</sup>
ゴム	1.00 × 10 <sup>3</sup>	1.76 × 10 <sup>3</sup>	1.76 × 10 <sup>6</sup>

が成立する．そして，eq. (13.3) より以下の関係式が得られる．

$$v_i = \frac{p_i}{\rho_1 c_1}, \quad (13.6)$$

$$v_r = -\frac{p_r}{\rho_1 c_1}, \quad (13.7)$$

$$v_t = \frac{p_t}{\rho_2 c_2}. \quad (13.8)$$

反射波は，音波の進む方向と粒子速度の正の方向が逆であるため負記号がつく．eqs. (13.6)-(13.8) を eq. (13.5) に代入して整理すると，

$$p_t = \frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1} (p_i - p_r), \quad (13.9)$$

が得られ，さらにこれを eq. (13.4) に代入して整理すると，

$$\frac{p_r}{p_i} = \frac{\rho_2 c_2 - \rho_1 c_1}{\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1}, \quad (13.10)$$

となり，これが反射率となる．これを見ると，音響インピーダンスが等しければ反射率は0となり反射せず，音響インピーダンスの差が大きいほど反射率が大きくなることが分かる．たとえば，Table II に示す空気から水へと音波を入射すると，反射率はほぼ1となりほとんどが反射することが分かる．これに対して，水からゴムへと音波を入射した際には反射率は0.0798となりあまり反射しない．空気中から水中等の音響インピーダンス差が大きい際には，音響整合層という，音響インピーダンスが2媒質の中間の値である物体を挟むと効率的に音波を入射することができる．

音響インピーダンスの差による音波の反射について述べたが，音響インピーダンスが等しくても急に断面積が変わると反射が起きる．例えば，楽器等において管体から放射する部分では急に断面積が広がることになる．音響インピーダンスが等しくて，断面積が  $S_1$  から  $S_2$  になる際には，eq. (13.9) が，

$$p_t = \frac{S_1}{S_2} (p_i - p_r), \quad (13.11)$$

となるので，反射率は

$$\frac{p_r}{p_i} = \frac{S_1 - S_2}{S_1 + S_2}, \quad (13.12)$$

となり，断面積差で反射率が変化することが分かる．これにより，楽器ではベル等の放射面で音波が反射することになる．

ちなみに，反射率が負となる場合は反射波の位相が反転することを示している．

Table III: 複素音場シミュレーションの条件

Fig.	トランスデューサ半径 (mm)	超音波周波数 (MHz)
(a),(b)	6.0	1.0
(c),(d)	3.0	1.0
(e),(f)	3.0	5.0

## 14 音波伝搬

次に、スピーカや超音波トランスデューサから放射される音波に関して述べる。音波は時間と空間を変数とする波動方程式により振る舞いが決定されるが、両方を変数とし解析するのは大変なので、しばしば調和振動を考える。調和振動は以下に示すような振幅  $p_0$ 、角周波数  $\omega$ 、波数  $k$  で正弦振動している音波である。

$$p = p_0 \exp\{-j(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})\}, \quad (14.1)$$

$$= p_a(\mathbf{r}) \exp(-j\omega t). \quad (14.2)$$

時間項を線形分離し、位置ベクトル  $\mathbf{r}$  のみにより変化する  $p_a$  を複素音場という。複素音場の振幅が、 $p_0$  であり、位相は  $\mathbf{k}\mathbf{r}$  となる。

ここで、円形の超音波トランスデューサからどのような音が放射されるかを複素音場によって示す。円形のトランスデューサは一様に振動するとし、トランスデューサの周りが無限大のバツフル（振動しない）に囲まれている、半無限空間であるとする。細かい原理は省くが、P. R. Stepanishen, J. Acoust. Soc. Am., 49 (1971) pp. 1629-1638. にて報告されている原理を用いる。

トランスデューサの半径と超音波の周波数を Table III のように設定し、音速 1500 m/s の水中を伝搬する超音波の複素音場計算結果を Fig. 14.1 に示す。灰色の長方形がトランスデューサであり、縦軸が音波の伝搬方向となっている。超音波は下から上に照射されており、図の左側が複素音場の振幅、右側が位相となっている。位相は少しつぶれているため見えにくいですが  $-\pi$  から  $\pi$  までめまぐるしく回転をしている。真ん中の図を中心に、上の図はトランスデューサの半径を大きくしたものの、下の図は周波数を上げたものになっている。

これらの複素音場から、音軸上の振幅、すなわちトランスデューサの中心直上を抜き出してプロットしたのが、Fig. 14.2 である。トランスデューサに近い位置では、極大、極小を繰り返しながら大きく変化しているのが分かる。そこからなだらかになり、最後の極大以降は 0 に漸近していくことになる。この極大の数はある法則性がある。超音波トランスデューサの半径を  $a$  とし、超音波の波長を  $\lambda$  とすると、 $a/\lambda$  だけ極大の数がある。さらに横軸を  $z/\lambda$  で正規化すれば、 $a/\lambda$  が等しいときには同じ分布となる。つまりは、 $a/\lambda$  が音場の特性を決定する。今回示した計算結果では、上の図が  $a = 4\lambda$ 、真ん中の図が  $a = 2\lambda$ 、下の図が  $a = 10\lambda$  となっている。

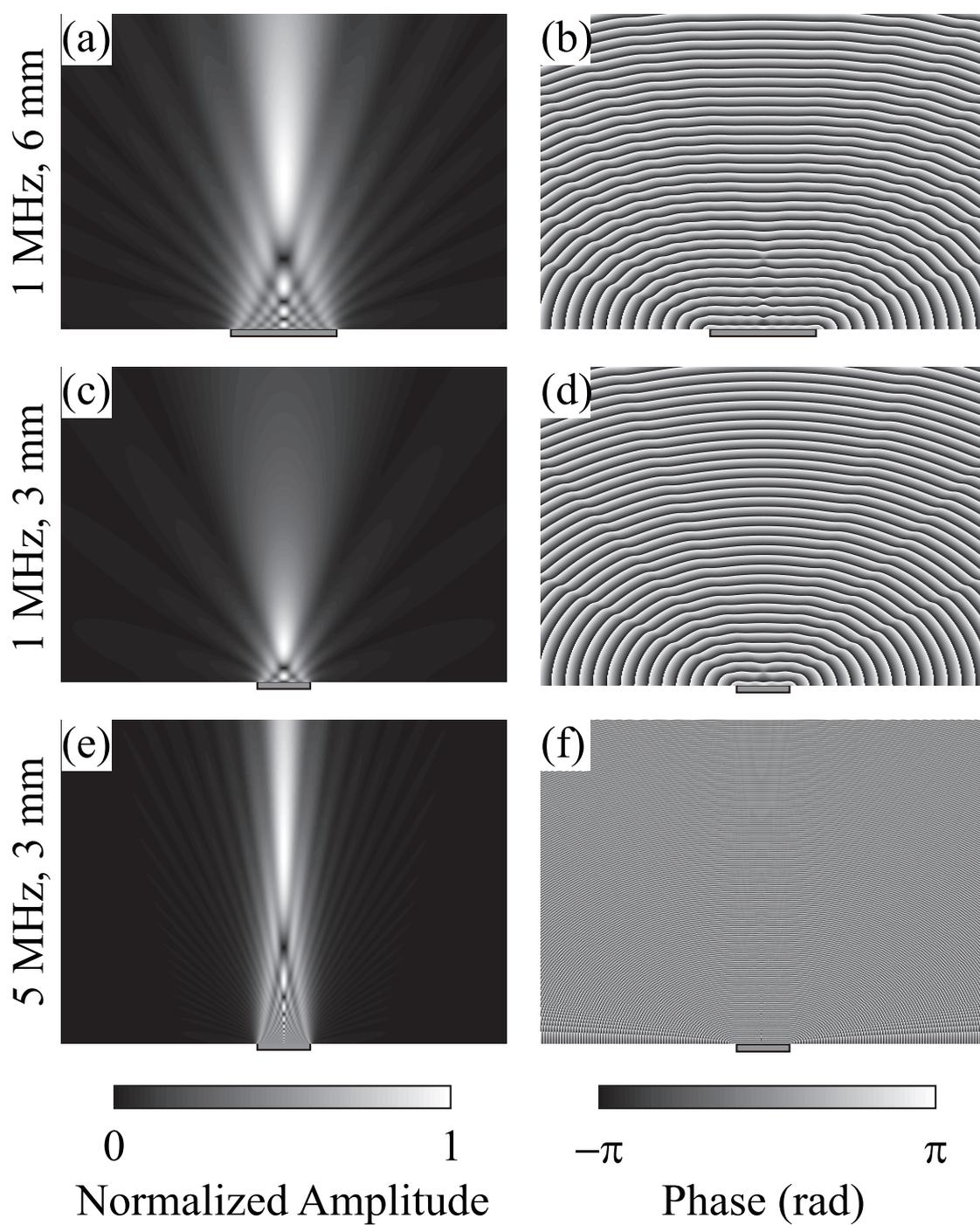


Fig. 14.1: トランスデューサ半径と超音波周波数を変化させた二次元複素音場

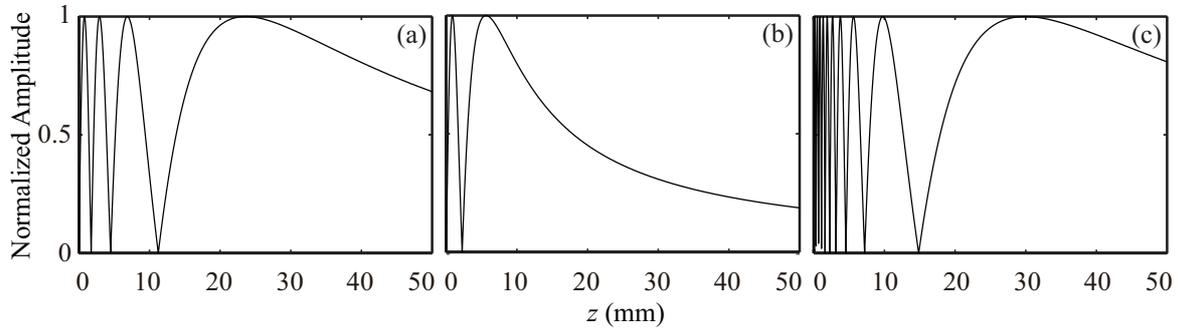


Fig. 14.2: 音軸上の二次元複素音場の振幅変化

### 14.1 遠距離場・近距離場

複素音場の振幅を見てみると超音波トランスデューサ付近では非常に複雑な分布となっており、だんだん単純な分布になっていくことが分かる。この区切りの目印として、最終極大点がある。最終極大値  $z_{\max}$  は超音波トランスデューサの半径と超音波の波長を用いて、

$$z_{\max} = \frac{a^2}{\lambda}, \quad (14.3)$$

で近似される。

この最終極大値の2倍くらいの位置を目安に近距離音場（フレネルゾーン）から遠距離音場（フラウンホーフゾーン）へと移行する。近距離音場は音波の干渉によって分布は複雑となり、平面波の伝搬として扱うことができない。それに対して遠距離音場の分布は単純になり、音波を平面波として扱っても誤差が小さくなっていく。トランスデューサの近傍で測定する際には、この近距離音場に留意しなければならない。近距離音場であれば、少しトランスデューサの位置がずれるだけで大きく音圧が変化し、平面波として扱うこともできなくなる。

### 14.2 指向性

Fig. 14.1 を見てみると、トランスデューサが大きくなっても、周波数が高くなっても超音波のビームは細くなっているのが分かるかと思う。さらに、上の図よりも下の図の方がビームが細くなっている。つまり、 $a/\lambda$  が大きくなるとビームが細くなり、指向性が強くなる。

指向性は、音響測定の際には重要である。無指向であればどこにマイクがあっても受信できるし、強い指向性があれば狙ったところに大きな信号を送ることができる。場合によって使い分ける必要がある。指向性を計算するために放射音場計算をするのは大変なので、指向性の計算には近似式を用いる。遠距離音場における無限大バツフルに囲まれた円形ピストン振動板の指向性は以下の指向性関数  $D(\theta)$  で与えられる。

$$D(\theta) = \frac{2J_1(ka \sin \theta)}{(ka \sin \theta)}. \quad (14.4)$$

$J_1$  は1次のベッセル関数、 $k = \omega/c$  は波数であり、指向性関数により  $0 \text{ rad}$  の振幅を1とした時の各角度  $\theta$  における振幅が得られる。例えば、周波数  $1 \text{ MHz}$  の超音波を音速  $1500 \text{ m/s}$  の水

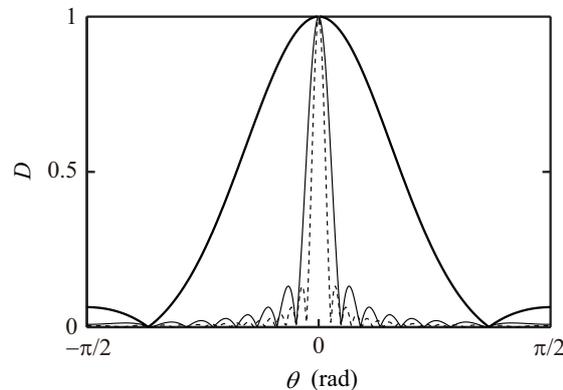


Fig. 14.3: トランスデューサ半径の変化による指向性関数の変化

中に放射する．トランスデューサの半径を 1 mm, 5 mm, 10 mm と変化させて指向性関数を計算したのが Fig. 14.3 である．太線が 1 mm, 細い線が 5 mm, 波線が 10 mm である．前述の通りトランスデューサが大きくなるほど指向性が強くなっている．このように，指向性は  $ka$  で決まることから音場の特性を示すには  $a/\lambda$  ではなく  $ka$  がよく用いられる．

### 14.3 音波の減衰

音波は，伝搬するに従って減衰する．そのなかで，大きな要因となるのが距離減衰と呼ばれるものである．点音源からの球面波を考えたとき，音圧の大きさは距離に反比例する．

その他の要因としてあげられるのが媒質による吸収である．水中は音が遠くまで届きやすく，空気中は届きにくいというのは経験があると思う．水と空気による吸収には大きな差がある．ここで，吸収係数というものを考える．吸収係数  $\alpha$  ( $\text{dB} \cdot \text{m}^{-1}$ ) は音圧  $p_1$  が  $d$  (m) 先で音圧  $p_2$  に減衰するとき

$$\alpha = \frac{d}{2} 20 \log_{10} \frac{p_1}{p_2}, \quad (14.5)$$

で表される．通常の液体や，単原子分子の気体中では周波数の 2 乗に比例するため， $\alpha/f^2$  で示される．理科年表によると，20 °C の水中においては， $\alpha/f^2 = 2.9 \times 10^{-13} \text{ dB/m} \cdot \text{Hz}^2$  である．20 °C で 1 kHz の音波の吸収係数  $\alpha = 2.9 \times 10^{-7} \text{ dB/m}$  であり非常に小さい．これに対して，空気中では吸収係数は非常に大きい．空気は単原子分子ではないため，吸収係数は複雑な変化をする．一例として，1 気圧，20 °C，相対湿度 10 %，1 kHz の超音波の吸収係数は，超音波便覧によると  $\alpha = 0.014 \text{ dB/m}$  であり，水中の約 48000 倍も大きい．

以上より，空気中で高周波を用いると減衰が大きいことや，水中で超音波を使う際に減衰が小さいことには注意が必要である．

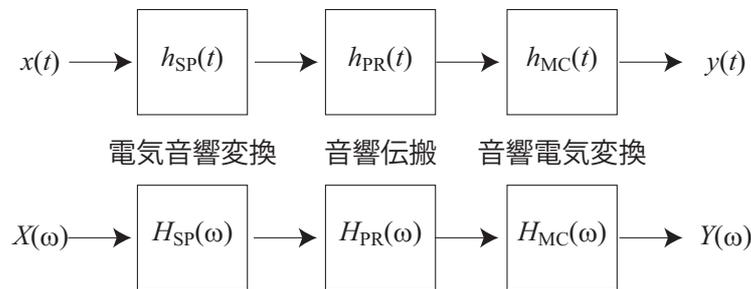


Fig. 15.1: 電気・音響系のブロック図

## 15 周波数特性

これまででは、音場の話を中心にしてきたが、音波を使った計測の際にはマイクやスピーカのこととも考えなければならない。ここで、Fig. 15.1 に示す線形システムを考える。入力信号  $x$  は電気音響変換（スピーカ）で音波に変換され、媒質を伝搬して、音響電気変換（マイク）で出力信号に変換される。電気音響変換特性を  $h_{SP}$ 、音波の伝搬特性を  $h_{PR}$ 、音響電気変換特性を  $h_{MC}$  と置くと、入出力関係は

$$y(t) = x(t) * h_{SP}(t) * h_{PR}(t) * h_{MC}(t), \quad (15.1)$$

というように、それぞれの特性をたたみ込んだ形で表され、周波数空間では

$$Y(\omega) = X(\omega)H_{SP}(\omega)H_{PR}(\omega)H_{MC}(\omega), \quad (15.2)$$

と単純な積で表される。これが意味しているものは、スピーカの特性やマイクの特性が、受信信号に直列に影響を及ぼすと言うことである。たとえ、いいマイクを使っても、スピーカが駄目ならば、出力信号はよくない結果になる。Fig. 15.2 に、伝搬特性により歪んだ出力結果を示す。Fig. 15.2(b) は Fig. 15.2(a) に示すチャープ信号（低周波から高周波（あるいは逆方向）に周波数が連続的に変わる信号）を入力した際の出力波形であり、Fig. 15.2(c) は、矩形波を入力した際の出力波形である。いずれも、入力信号の波形から大きく歪んでいることが分かる。

以上より、測定の際には用いるスピーカやマイクの周波数特性を把握しておくことが大切である。Fig. 15.3 にその一例を示す。Fig. 15.3(a) は特性はコンデンサマイクロフォンの周波数特性の振幅、Fig. 15.3(b) は水中マイクロフォン（ハイドロフォン）の特性、Fig. 15.3(c) は超音波トランスデューサの特性を示している。コンデンサマイクロフォンは、ある程度フラットな特性になっているが、ハイドロフォンはフラットではなく、トランスデューサは共振点で用いるため特定の周波数以外では振幅特性がかなり小さくなっている。コンデンサマイクロフォンでも全ての周波数帯でフラットであるわけではなく、ここまではフラットであるという注意書きがあるのでそれも把握しておく必要がある。

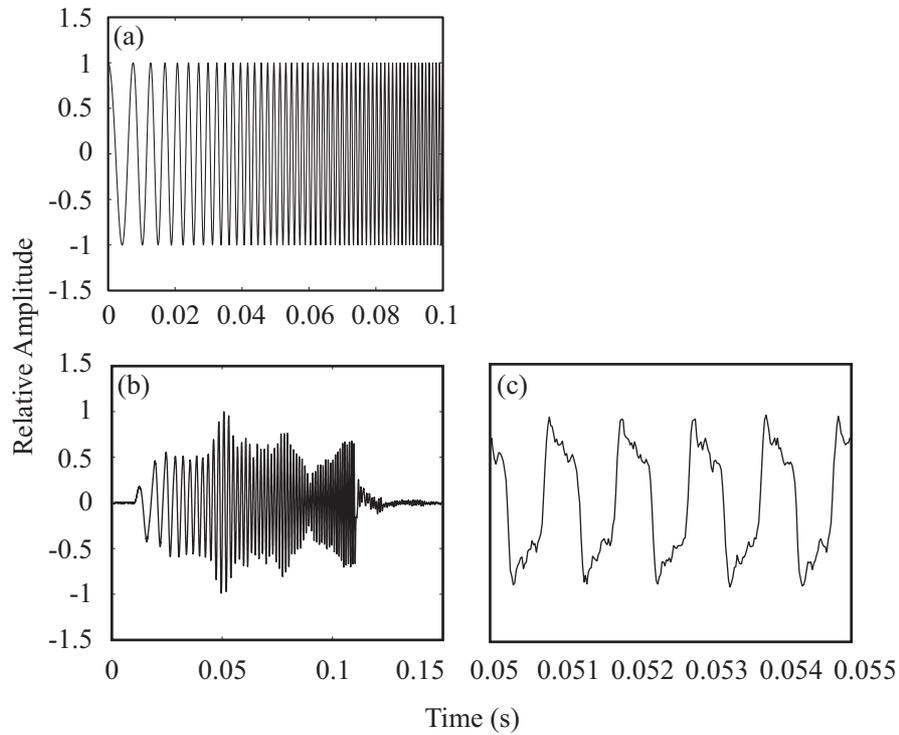


Fig. 15.2: 伝搬特性による出力波形の歪み

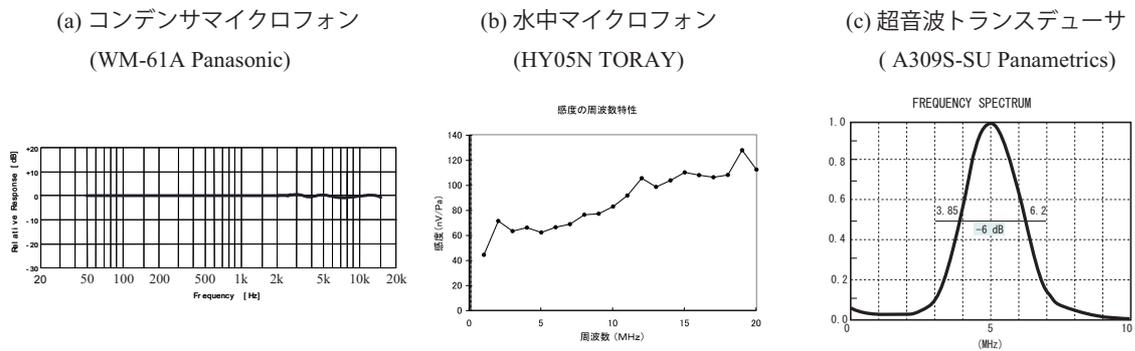


Fig. 15.3: プローブの周波数特性

< 著者略歴 >

- 大淵 武史 (Takeshi Ohbuchi)
  - 2005年 筑波大学第三学群工学システム学類 卒業
  - 2007年 筑波大学大学院博士前期課程 修了
  - 2007年より筑波大学大学院博士後期課程 在学  
現在にいたる
  
- 西宮 康治朗 (Kojiro Nishimiya)
  - 2006年 学習院大学理学部物理学科 卒業
  - 2008年 筑波大学大学院博士前期課程 修了
  - 2008年より筑波大学大学院博士後期課程 在学  
現在にいたる
  
- 海老原 格 (Tadashi Ebihara)
  - 2007年 筑波大学第三学群工学システム学類 卒業
  - 2009年 筑波大学大学院博士前期課程 修了
  - 2009年より筑波大学大学院博士後期課程 在学  
現在にいたる
  
- 佐藤 裕治 (Yuji Sato)
  - 2004年 防衛大学校応用科学群地球海洋学科 卒業
  - 2009年 筑波大学大学院博士前期課程 修了
  - 2009年より筑波大学大学院博士後期課程 在学  
現在にいたる

ACLAB 新入生ゼミテキスト

---

2009年4月1日 初 版

編 者 大淵 武史  
発 行 2009年度新入生ゼミ実行委員会  
印 刷 筑波大学 音響システム研究室

---

NAME