フーリエ変換入門

大淵　武史

2008.05.22

目 次

1　フーリエ変換

音や光といった「波」を扱う分野では、波の周波数特性の解析が重要なのは言うまでも無い。周波数解析の時によく用いられるのが、フーリエ変換であるが原理をしっかり押さえておかないと使い方を誤ることになる。というわけで、フーリエ変換について１から勉強していきたいと思う。

1.1　べき級数展開

いきなり、フーリエ変換に進むことはしない。フーリエ変換の元となるフーリエ級数展開、さらにはその基礎であるべき級数展開から行っていく。

べき級数展開の「べき」は漢字で書くと「冪」であり、ある一つの数同士を繰り返し掛け合わせるという操作のことをいう。べき級数展開とはある関数 $f(x)$ を以下のようなべき級数の多項式に展開することである。

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \ldots + a_n x^n + \ldots. \quad (1.1.1)$$

さて、関数 $f(x)$ をべき級数展開するためには係数、eq. (1.1.1) における a_n を決定する必要がある。まず、a_0 を決定してみる。これは簡単で、$x = 0$ を代入すればよい。そうすると $f(0) = a_0$ となり a_0 を決定することができる。

次に a_1 を決定する。このために eq. (1.1.1) の両辺を微分する。

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots. \quad (1.1.2)$$

こうして、$f'(0) = a_1$ が得られ、a_1 を決定できる。同様に

$$f''(x) = 2a_2 + 3\cdot 2a_3 x + 4\cdot 3a_4 x^2 + 5\cdot 4a_5 x^3 + \ldots + n(n-1)a_n x^{n-2} + \ldots. \quad (1.1.3)$$

$$f'''(x) = 3\cdot 2a_3 + 4\cdot 3\cdot 2a_4 x + 5\cdot 4\cdot 3a_5 x^2 + \ldots + n(n-1)(n-2)a_n x^{n-3} + \ldots. \quad (1.1.4)$$

より、a_2 及び a_3 を求めることができる。以上より、級数の係数は

$$a_n = \frac{1}{n!} f^n(0), \quad (1.1.5)$$

で決定することができ、関数 $f(x)$ のべき級数展開式は以下の式で与えられる。

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^n(0) x^n. \quad (1.1.6)$$

1.2　フーリエ級数展開

つぎに、フーリエ級数展開に移る。基本はべき級数展開と同じである。係数決定の際に、いらないものをゼロにすればよい。

フーリエ級数展開は関数 $f(x)$ を以下のような無限級数で展開する。

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0\cos 0x + a_1\cos 1x + a_2\cos 2x + a_3\cos 3x + \ldots + a_n\cos nx + \ldots \\ &+ b_0\sin 0x + b_1\sin 1x + b_2\sin 2x + b_3\sin 3x + \ldots + b_n\sin nx + \ldots \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

見ていただいて分かるとおり、関数を sin と cos のそれぞれの周波数の成分で表すことになる。$\cos 0 = 1$、$\sin 0 = 0$ であることを利用して整理をすると

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1\cos x + a_2\cos 2x + a_3\cos 3x + \ldots + a_n\cos nx + \ldots \\ &+ b_1\sin x + b_2\sin 2x + b_3\sin 3x + \ldots + b_n\sin nx + \ldots, \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

となる。この a_n、b_n（フーリエ級数と言う）を決定する必要があるのだが、べき級数と違ってゼロを入れればいいというわけではない。以下に示す三角関数の性質を利用する。

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi}\sin(nx)dx &= 0 \\ \int_0^{2\pi}\cos(nx)dx &= 0. \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

これは、単位円を思い浮かべていただければすぐ理解できると思う。ゼロになるこの演算は使えそうだということで、eq. (1.2.2) を 0 から 2π まで積分してみる。

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x)dx &= a_0\int_0^{2\pi} dx \\ &= 2\pi a_0. \end{aligned} \tag{1.2.4}$$

となり、a_0 をのぞいてすべて消える。以上より

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx, \tag{1.2.5}$$

とひとまず a_0 を決定することができた。このように積分を使って係数を決定していく。

まず、以下の積分を考える。

$$\int_0^{2\pi}\sin(mx)\cos(nx)dx = 0. \tag{1.2.6}$$

これは、積和の公式から導かれる。
　次に、以下の積分を考える。

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \sin(mx)\sin(nx)dx \\
&\int_0^{2\pi} \cos(mx)\cos(nx)dx.
\end{aligned} \tag{1.2.7}$$

これらの積分は二通りの場合に分けられる。

- $m = n$

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \sin(mx)\sin(nx)dx &= \pi \\
\int_0^{2\pi} \cos(mx)\cos(nx)dx &= \pi.
\end{aligned} \tag{1.2.8}$$

- $m \neq n$

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \sin(mx)\sin(nx)dx &= 0 \\
\int_0^{2\pi} \cos(mx)\cos(nx)dx &= 0.
\end{aligned} \tag{1.2.9}$$

これらは各自確認していただきたい。これで、特定の項を以外をゼロにする準備ができた。早速バリバリ積分していく。

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx &= a_n\pi \\
\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx &= b_n\pi.
\end{aligned} \tag{1.2.10}$$

以上より

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx,
\end{aligned} \tag{1.2.11}$$

が得られ、a_n および b_n を決定することができた。
　今回、積分範囲を 0 から 2π までとしたが、別に $-\pi$ から π とかでもかまわない。

1.3 複素フーリエ級数展開

たくさんの積分をしてなんとか a_n と b_n を求めることができたが、なんとも煩雑でめんどくさい。なので、複素フーリエ級数を導入することで簡素な形にする。

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)), \tag{1.3.1}$$

という、フーリエ級数展開の一般式をオイラーの公式

$$e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i \sin\theta, \tag{1.3.2}$$

を用いて

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \tag{1.3.3}$$

のような複素フーリエ級数展開を定義する。この c_n を求めるためにまた積分をする。

$$\int_0^{2\pi} e^{inx} dx = 0, \tag{1.3.4}$$

となることを用い、eq. (1.3.3) の両辺に e^{-inx} をかけ積分をする。

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx &= \int_0^{2\pi} c_n dx \\ &= 2\pi c_n. \end{aligned} \tag{1.3.5}$$

という風に、$e^{inx} \cdot e^{-inx} = 1$ より、c_n のみを取り出すことができる。以上より、ある関数 $f(x)$ の複素フーリエ級数展開は以下のようにできる。

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \\ c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx. \end{aligned} \tag{1.3.6}$$

ここで、注意を。今回、フーリエ級数展開で e^{inx} を用いたが e^{-inx} を用いることもできる。この場合、フーリエ係数は e^{-inx} ではなく e^{inx} になる。さらに、eq. (1.3.6) における n は周波数ではなく角振動数である。よって、n ではなく $2\pi f$ を用いることがある。こちらの方が、直接周波数を示しているし、2π という係数もいらなくなるので便利である。フーリエ変換を用いる時はどちらを使うのか、また符号をどうするのかを確認することが大切である。

1.4 フーリエ変換

さきほどの角振動数ではなく周波数を用いる場合

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \sum_{-\infty}^{\infty} c_f e^{2\pi i f t} \\
c_f &= \int_0^1 f(t) e^{-2\pi i f t} dt.
\end{aligned}
\tag{1.4.1}
$$

となる。このなかで、特に上の式に注目していただきたい。当たり前ではあるが、これは離散値である。周波数は $f = 1, 2, 3, \ldots$ となっていく。もちろん、この間隔を変えることができる。この間隔を無限小にしたらどうなるだろうか？

$$
f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} c(f) e^{2\pi i f t} df. \tag{1.4.2}
$$

という、連続の形になるのは容易に想像がつくだろう。これをフーリエ積分という。c_f ではなく $c(f)$ となったところに注意していただきたい。これは、離散値ではなく連続値になったことを示している。ただ、こうすると問題が出てくる。離散値であったため $\int_0^1 e^{2\pi i f t} = 0$ と整数倍はゼロになることを使えた。今までの方法では f が整数でなければ $c(f)$ を決定することができない。ここで、用いるのが以下の関係である。

$$
\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i f t} dt = 0. \tag{1.4.3}
$$

今度はゼロでない任意の f で成り立つ。f がゼロの時だけ上の積分はゼロではなくなる。これを用いて

$$
c(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i f t} dt. \tag{1.4.4}
$$

以上まとめると

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} c(f) e^{2\pi i f t} df \\
c(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i f t} dt.
\end{aligned}
\tag{1.4.5}
$$

となる。これらを見ていただくと、t（時間領域）と f（周波数領域）をこの二式で行き来しているのが分かる。この変換を Fourier 変換という。

1.5 フーリエ変換の周期性

ここで、フーリエ変換の周期性に関して述べる。フーリエ変換はもともとある範囲内で周期性があることを前提としている。はじめの方で述べた複素フー

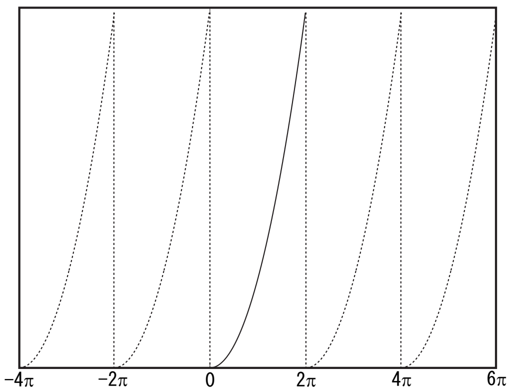

図 1: フーリエ変換の周期性の仮定

リエ級数ではもとの関数に exp 関数をかけて $0 < x < 2\pi$ の範囲で積分を行っている。これは、この $0 < x < 2\pi$ の区間 2π を周期とする関数とみなして計算をしていることになる。

Fig. 1 に具体的にどのようになるかを示す。この図では二次関数 $y = x^2$ のフーリエ変換を行う際、積分範囲を実線で示す $0 < x < 2\pi$ にした場合、その他の部分は破線のように積分範囲を周期とした周期関数となっている。よって、逆フーリエ変換をすると破線の部分も含んだ結果が出てくる。

以上より、気をつけなければならないのはデータの存在範囲に関してである。連続のフーリエ変換では積分範囲が $\pm\infty$ となっているので以上のような周期性の問題はないように感じるが、実際に得られるデータは無限ではなく有限である。その場合、積分範囲は得られたデータ範囲となり、そのデータ範囲を周期とする周期関数となる。この問題は以降の離散フーリエ変換でも同様である。

1.6 離散フーリエ変換

さて、今まで連続のフーリエ変換について述べてきたわけだが、現実世界ではもちろん連続で取り扱うことはできない。データは離散化されるのである。取得したデータが離散化されているのであれば、それに対応されるフーリエ変換も離散化される。

ということで、以下に示す N 個の一連の標本値からフーリエ変換を推定することにする。

$$\begin{aligned} h_k &\equiv h(t_k), \\ t_k &\equiv k\Delta, \\ k &= 0, 1, 2, \ldots, N-1. \end{aligned} \tag{1.6.1}$$

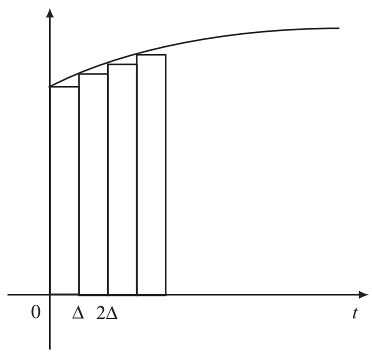

図 2: 区分求積法

Δ は標本化間隔を示す。簡単のため N は偶数であるとする。この N 個のデータからフーリエ変換を行うわけであるが、連続の周波数データはもちろん N 個以上の出力を得ることはできない。よって、周波数も離散的な値

$$\begin{aligned} f_n &\equiv \frac{n}{N\Delta}, \\ n &= -\frac{N}{2}, \ldots, \frac{N}{2}. \end{aligned} \tag{1.6.2}$$

周波数ではプラスとマイナス両方あるために、2 で割っている。f_n を見ていただければ分かるとおり、n の両端は Nyquist 帯域の両端に相当する。よく見ると、n の値は N 個ではなく $N+1$ 個になっている。後から示すが、両端は独立ではないので独立な数は N 個である。

以上を用いて eq. (1.4.2) を離散化していく。原理は簡単で、fig(2) に示すとおり面積を積分では無く区分求積法に置き換えるだけである。

$$\begin{aligned} H(f_n) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-2\pi i f_n t} dt \\ &\approx \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{-2\pi i f_n t_k} \Delta \\ &= \Delta \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{-\frac{2\pi i n k}{N}}. \end{aligned} \tag{1.6.3}$$

最後の等号は eqs.(1.6.1),(1.6.2) から導かれる。最後の和は N 点 h_k の離散フーリエ変換と呼ばれ H_n で表す。

$$H_n = \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{-\frac{2\pi i n k}{N}}. \tag{1.6.4}$$

Δ がなくなっているのが分かる。無次元化をしたのである。よって、離散フーリエ変換と標本化した連続フーリエ変換は以下の関係で示され同じではない。

$$H(f_n) \approx \Delta H_n. \tag{1.6.5}$$

さて、eq. (1.6.4) を見ていただきたい。n についての周期関数であることが分かる。周期は N である。よって $H_{-n} = H_{N-n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ が成り立つことが分かる。先ほど言った独立な数は合うというのはこういうことである。両端が等しくなるわけである。

続いて、離散逆フーリエ変換についてである。離散フーリエ変換と同様に。

$$\begin{aligned} h(t_k) &= \int_{-\infty}^{\infty} H(f) e^{2\pi i f t_k} df \\ &\approx \frac{1}{N\Delta} \sum_{k=0}^{N-1} H_n e^{\frac{2\pi i n k}{N}}. \end{aligned} \tag{1.6.6}$$

さらに、無次元化を行って、

$$h_k = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_n e^{\frac{2\pi i n k}{N}}, \tag{1.6.7}$$

で表される。eqs.(1.6.4),(1.6.7) の組が離散フーリエ変換、離散フーリエ逆変換である。

1.7 高速フーリエ変換

先に離散フーリエ変換を用いたが、実際に計算を行うとどうなるか。複素数 W を以下のように定義する。

$$W \equiv e^{\frac{2\pi i}{N}}. \tag{1.7.1}$$

そうすると、eq. (1.6.4) は W を用いて以下のようにかける。

$$H_n = \sum_{k=0}^{N-1} W^{nk} h_k. \tag{1.7.2}$$

これは、N^2 回の乗算が必要であり、計算コストは $O(N^2)$ で莫大なものである。このまま、馬鹿正直に計算するのではなく工夫しましょうというのが高速フーリエ変換 (FFT) である。発想自体は単純である。N 点のデータを奇数と偶数二つに分け、それぞれをフーリエ変換して足し合わせる。分けたものをさらに奇数と偶数にわけ……と繰り返していけば、計算コストは $O(N \log N)$ となる。こ

れによって、例えば $N=10^6$ とし計算機が 1 マイクロ秒で演算するとすると、2 週間と 30 秒の違いがある。

奇数と偶数に分けるのでデータ数は 2^n であることが望ましい。そうでなければ、2^n になるまで 0 をつめる。実際に matlab ではそういう処理をしている。できるだけ、データ数は 2^n になるようにしたい。

さてここで、問題点は二つに分け足しあわせることができるか？ということである。それを以下に示す。

$$\begin{aligned} F_k &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi ink}{N}} f_n \\ &= \sum_{j=0}^{N/2-1} e^{\frac{2\pi i(2j)k}{N}} f_{2j} + \sum_{j=0}^{N/2-1} e^{\frac{2\pi i(2j+1)k}{N}} f_{2j+1} \\ &= \sum_{j=0}^{N/2-1} e^{\frac{2\pi ijk}{(N/2)}} f_{2j} + W^k \sum_{j=0}^{N/2-1} e^{\frac{2\pi ijk}{(N/2)}} f_{2j+1} \\ &= F_k^e + W^k F_k^o \end{aligned} \tag{1.7.3}$$

この最後の行で W は eq. (1.7.1) と同じ複素定数である。また、F_k^e は元の f_n の偶数番の成分からなる長さ $N/2$ のフーリエ変換の第 k 成分である。さらに、F_k^o は元の f_n の奇数番の成分からなる長さ $N/2$ のフーリエ変換の第 k 成分である。以上より、離散フーリエ変換を分離できることを示した。あとは、再帰等を用いて計算すればいいだけである。

1.8 課題

実際に matlab 等を用いてフーリエ変換をして欲しい。対象のデータは本研究室の加藤氏に提供してもらったクラリネットの吹鳴音である、
”http://www.aclab.esys.tsukuba.ac.jp/ ohbuchi/wave001.txt”
を使う。音程は音孔開放時の F（349.2Hz）で、サンプリング周波数は 100 kHz、計測時間は 1 秒である。このデータをロードし、FFT をする。その後、中心が 0 Hz になるように調整する。横軸の刻みがどのようになるかは、サンプリング周波数と計測時間から求めて欲しい。中心を 0 Hz となるように調整したフーリエ変換結果は複素数であるので、その振幅を 0 Hz から 500 Hz の範囲でプロットする。そうすると、ピークが見えるはずである。このピークに関しての考察をしてほしい。