FDTD 法による音波伝搬シミュレーション

大淵　武史

2008.05.22

目 次

1　音波伝搬シミュレーション

波動方程式により、音波のふるまいを示す基本式が得られた。しかしながら微分方程式であるため、具体的にどのように伝搬するのかはその式からは分らない。式も見ても複雑な微分方程式であり容易に解を求めることができないことが分る。そこで、数値的にシミュレーションをすることを考える。

1.1　差分法

様々なシミュレーション手法があるがここでは差分法を用いる。差分法は、原理及びプログラムが簡単であるため容易にシミュレーションをすることができる。差分法とは微分を差によって表す方法である。微分の定義を思い出してみると分かる。

$$\frac{df}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \tag{1.1.1}$$

微分は微小間隔における傾きであった。この微小間隔では極限を取る必要があるが、極限を取らないのが差分法である。すなわち、

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \tag{1.1.2}$$

という様な近似を考える。極限をとらないので以下のような差分法の種類がある。

- 前進（前方）差分: $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
- 後退（後方）差分: $\frac{f(x)-f(x-h)}{h}$
- 中央（中心）差分: $\frac{f(x-h)-f(x+h)}{2h}$

基本的には精度のよい中央差分が使われる。

1.2　FDTD 法による音波伝搬シミュレーション

では、波動方程式を中央差分によって近似していく。まず左辺から。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} &= \frac{1}{dx}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) \\
&\approx \frac{1}{dx}\left(\frac{p(x+\Delta x, t) - p(x-\Delta x, t)}{2\Delta x}\right). \\
&\approx \frac{p(x+2\Delta x, t) + p(x-2\Delta x, t) - 2p(x,t)}{4\Delta x^2} \\
&= \frac{p(x+\Delta x, t) + p(x-\Delta x, t) - 2p(x,t)}{\Delta x^2}
\end{aligned} \tag{1.2.1}$$

右辺も同様に

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \approx \frac{p(x,t+\Delta t)+p(x,t-\Delta t)-2p(x,t)}{c^2\Delta t^2} \tag{1.2.2}$$

と近似できるので、まとめて整理をすると

$$p(x,t+\Delta t) = \frac{c^2\Delta t^2}{\Delta x^2}\{p(x+\Delta x,t)+p(x-\Delta x,t)-2p(x,t)\}-p(x,t-\Delta t)+2p(x,y), \tag{1.2.3}$$

となる。ここで、二次元配列を考え $p(x+\Delta x,t)=p(x+1,t)$、$p(x,t+\Delta t)=p(x,t+1)$ とすると以下のように表すことができる。

$$p(x,t+1) = \frac{c^2\Delta t^2}{\Delta x^2}\{p(x+1,t)+p(x-1,t)-2p(x,t)\}-p(x,t-1)+2p(x,y), \tag{1.2.4}$$

以上の式によって、現在の音波の様子及び一つ前の時間の音波の様子が分れば、次の時間の音波の様子を知ることができる。これが、微分方程式を時間と空間両方で差分したものであり、この手法を FDTD(Finite Difference Time Domain method) 法と呼ぶ。

1.3　安定条件

FDTD 法によるシミュレーションをするにあたり、時間刻み Δt や空間の刻み Δx を決める必要がある。こられはどのような値でもいいというわけではない。注意して決めないと発散してしまう。具体的には以下の関係式を満たす必要がある。

$$c \leq \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{1.3.1}$$

右辺の方が大きいということは、時間 1 ステップで 2 個、3 個隣まで値が伝搬してしまうことになる。そうすると、両隣の値が必要である FDTD では正確なシミュレーションがでいなくなることが分る。

1.4　境界条件

シミュレーションを行う空間は有限である。よって、端が存在する。その端をどのような条件にするかを境界条件と呼ぶ。さらに、途中で媒質が異なる等の境界が存在する場合にも境界条件を設定する必要がある。様々な境界条件があるが、ここでは二つだけ紹介する。

一つ目は固定境界。これは、弦があって杭などで固定されているところを考えればよい。この固定境界があるところでは時間によらず $p = const$ となる。

２つ目は自由境界。境界の外側にも同じ空間が広がっている状態である。この場合は、微分値が 0 となる。微分値を 0 にするためには境界のもう一個外側に計算領域を設ける必要がある。境界が $x = N$ であるとすると、$p(N+1,t) = p(N-1,t)$ とすれば、中央差分を用いれば $x = N$ において微分値は 0 となる。

1.5　プログラムコンテスト課題

実際に matlab 等で FDTD シミュレーションをしてみる。ここでは折角なので、効率の良いプログラムを作ってほしい。つまりは、分りやすくて、すっきりしていて、計算時間の早いプログラムを作ってほしい。

やってもらうシミュレーションは１次元 FDTD である。境界条件は両端とも固定端で $p = 0$。初期条件は、$t = 0$ で中心（平均値）が領域の中心で幅（分散）が領域の長さの 1/20 であるガウス分布とする。ガウス分布は matlab の関数 gaussmf(Fuzzy Logic Toolbox) を用いると簡単だと思う。この初期条件からそっと手を離す。つまりは、次のステップでも初期条件と同じ値とする。以下、詳しい条件をまとめる。

領域の長さ	0.1 m
計算時間	0.1 s
音速	100 m/s
空間刻み	1.0×10^{-3} m
時間刻み	1.0×10^{-5} s

計算結果は二次元配列に保存する。$p(x,t)$ でも $p(t,x)$ でもよい。