CT法入門

大淵　武史

2008.09.30

目 次

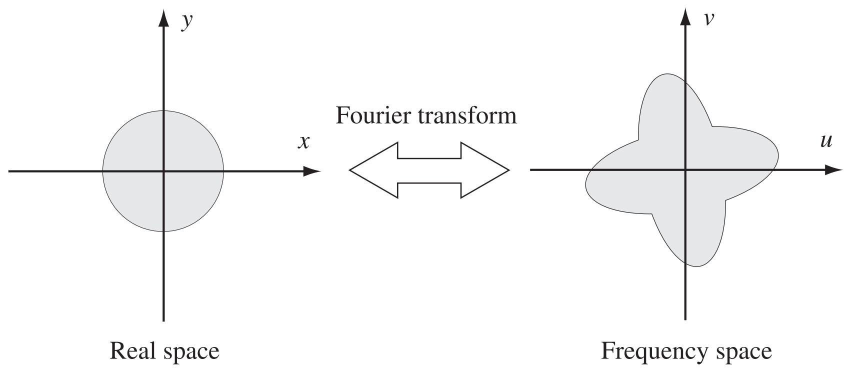

Fig. 1: 実空間と周波数空間の関係

1　はじめに

CT(Computerized Tomography) 法は分布の再構成に幅広く使われており、身近なものとしては医療に用いられている CT スキャンがある。CT 法の特徴は、平均化された（積分された）データ、投影データから分布が再構成されるもので、発信源（レーザ、X 線、音波等）とセンサの対で測定をする際に有効である。これらの測定では、発信源とセンサの間の積分値のみが得られる。

CT 法にはいくつか注意しなければならない点がある。原理を説明しながら明らかにしていきたい。

その原理も単純な式展開ではなく、概念的に理解できるように工夫をしていきたいと思う。

1.1　実空間と周波数空間

CT 法では、フーリエ変換 (Fourier transform) を理解しておく必要がある。ここでは、フーリエ変換の詳しい説明をしない。フーリエ変換する前の空間的な分布を実空間 (real Space) における分布、フーリエ変換後の分布を周波数空間 (frequency space) における分布という。Fig. 1 にその関係を示す。見ていただければ分かるように、実空間における分布から周波数空間における分布が得られ、周波数空間における分布から実空間における分布が得られる。この関係は重要である。

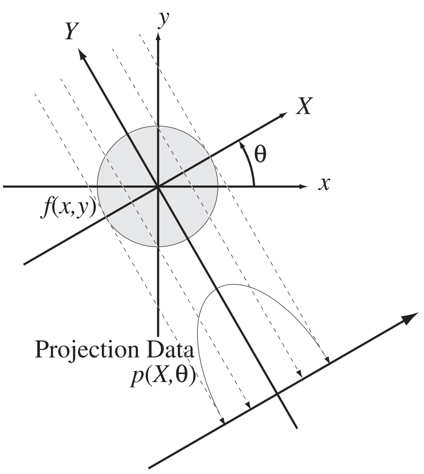

Fig. 2: 再構成対象分布と投影データ

1.2　測定データ

まず、測定されるデータはどういうものか確認しておく必要がある。医療で用いられているいわゆる CT スキャンは、X 線 CT 法という X 線を用いるもので対象は人体である。X 線は人体で吸収される。そのどれだけ吸収されたかというデータを再構成すれば、人体の様子を見ることができる。

次に、音波を用いる CT 測定法は、対象は温度等である。温度によって音速が変化する。その音速分布を CT 法で再構成すれば、温度分布を得ることができる。

以上のように、見たいものに対して何を再構成すればよいかというのは考える必要がある。

1.3　投影データ

次に、CT 法により測定する際に得られる投影データについて説明をする。

まず、Fig. 2 に再構成する対象である分布 $f(x, y)$ と投影データ $p(X, \theta)$ を示す。投影データは、xy 座標から θ 回転した XY 座標上で測定される。発信源とセンサは Y 軸と平行な直線上に置き、Y 軸方向で積分された値が得られる。しかしながら、一回の測定では一点しか得られないので X 軸方向に直線走査をしてスキャンすることで投影データを得る。この投影データは対象となる二次元分布を Y 軸方向に積分した一次元投影データとなる。

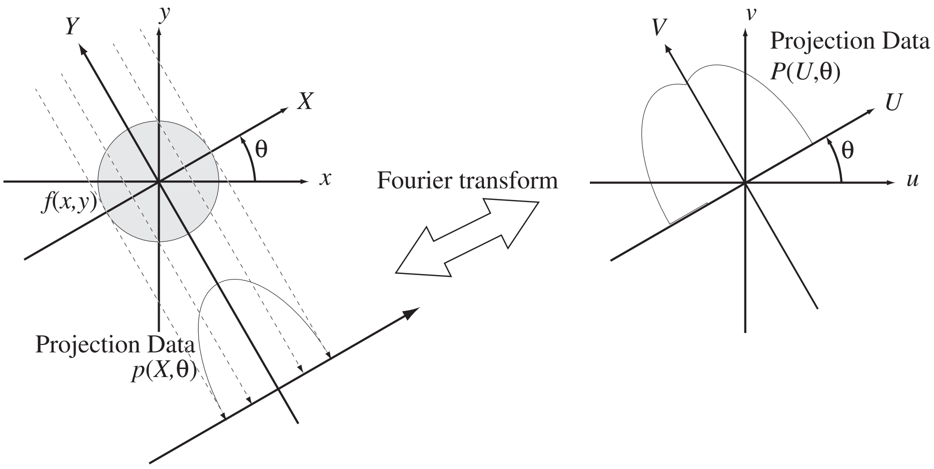

Fig. 3: 投影切断面定理

ここで、投影データと対象の分布の関係は以下の式で表される。

$$\begin{aligned} p(X,\theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dY \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(X\cos\theta - Y\sin\theta, X\sin\theta + Y\cos\theta)dY. \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

1.4 投影切断面定理

投影切断面定理は、CT 法の肝となる部分である。これは、実空間での投影データと周波数空間での投影データの関係を与えるものである。

Fig. 3 にその関係式を示す。実空間における投影データはあくまでも積分された値であり、xy 座標上の値は分からない。しかしながら、周波数空間における投影データは uv 座標を θ 回転させた UV 座標上の値になる。従って、座標変換をすれば uv 座標上の値が分かることになる。

とすると、回転させる θ を連続的に動かしていけば、uv 座標上全ての点において周波数空間における再構成対象分布を得られることになる。この際に行うのが回転走査であり、直線走査で投影データが得られ、回転走査を加えてすることで周波数空間における対象分布を得ることができる。

ここで、実空間と周波数空間の関係を思い出して欲しい。フーリエ逆変換をすることにより、周波数空間における分布から実空間における分布を得ることができる。

以上が投影切断面定理であり、CT 法の概要となる。ちなみに、この関係式をそのまま利用する方法をフーリエ変換法という。

ここで、投影切断面定理の導出をする。

$$p(X,\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(X\cos\theta - Y\sin\theta, X\sin\theta + Y\cos\theta)dY. \quad (1.4.1)$$

これをラドン変換という。

ここで、$f(x,y)$ の二次元フーリエ変換を $F(u,v)$ とすると、

$$F(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\exp\{-j(xu+yv)\}dxdy, \quad (1.4.2)$$

となり、これを極座標 $F(k\cos\theta, k\sin\theta)$ へ変換すると

$$\begin{aligned}
F(k\cos\theta, k\sin\theta) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\exp\{-jk(x\cos\theta + y\sin\theta)\}dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}[\int_{-\infty}^{\infty} f(X\cos\theta - Y\sin\theta, X\sin\theta + Y\cos\theta)dY]\exp\{-jkX\}dY \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} p(X,\theta)\exp(-jkX)dX \quad (1.4.3)
\end{aligned}$$

1.5 CT 法概念のまとめ

Fig. 4 に今まで説明した CT 法の概念をまとめる。

1.6 フィルター補正逆投影法

実際の CT 法では連続ではなく離散データが得られるため、フーリエ変換法は周波数空間においてデータが等間隔になるように内挿によりグリッド上の値を求めてからフーリエ逆変換をする必要がある。これが誤差の要因となるため、周波数空間において内挿をする必要がないようにする。

フーリエ変換法は、一次元投影データをフーリエ変換し、回転走査をして周波数空間上で集めて二次元逆フーリエ変換をする。これを、一次元投影データをフーリエ変換したものを極座標に変換し極座標の一次元逆フーリエ変換し、回転走査をして実空間上で結果をあわせる。これにより、内挿による誤差が軽減される。

CT 法では一般的にフィルター補正逆投影法が用いられる。

1.7 CT 法での注意点

投影データを示す図でも説明したように、データは直線的に伝搬することを仮定している。レーザや X 線では直進性が強いためあまり問題にならないが、

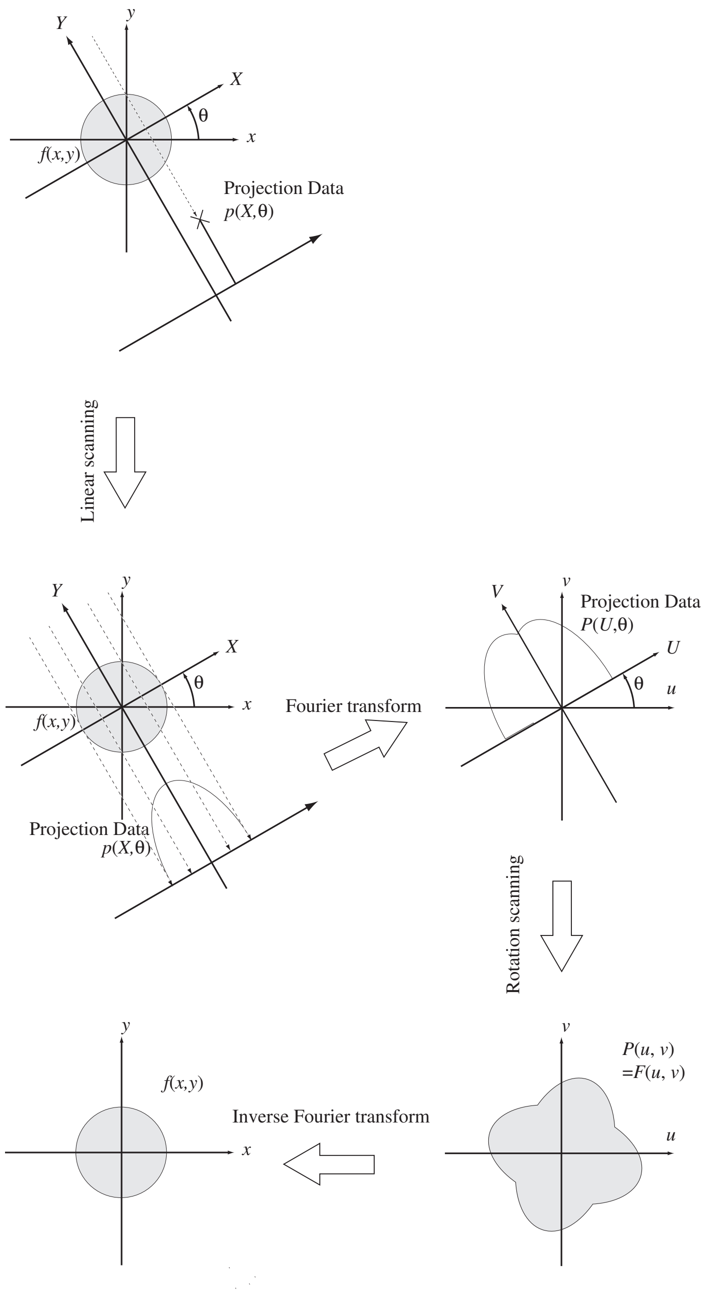
Y
y
X
θ
x
f(x,y)
Projection Data
p(X,θ)
Linear scanning
Y
y
X
θ
x
f(x,y)
Projection Data
p(X,θ)
Fourier transform
V
v
Projection Data
P(U,θ)
U
θ
u
Rotation scanning
y
f(x,y)
x
Inverse Fourier transform
v
P(u, v)
=F(u, v)
u

Fig. 4: CT 法の概念

音波は直進性が弱い。回折の影響を強く受ける。そこで、直進性が仮定できるかの確認は必要である。

さらに、見たいものと測定するデータの間の特性、例えば温度と音速の特性、吸収率と体組織の特性には線形性が仮定される。これが、特性の位相が変化するようなものであると使用することができない。

以上の二つは、注意して CT 法を使って欲しい。